Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS)
Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck
http://isas.uni-karlsruhe.de

1 Ereignisse

Ein **endlicher Ergebnisraum** eines **Zufallsexperimentes** ist eine nichtleere Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$. Die Elemente $\omega_n \in \Omega$ heißen **Ergebnisse**. Jede Teilmenge $A \subset \Omega$ wird als **Ereignis**, jede einelementige Teilmenge $\{\omega_n\} \subset \Omega$ wird als **Elementarereignis** bezeichnet. Der Ergebnisraum Ω und die leere Menge $\varnothing$ sind stets Ereignisse; Ω heißt das **sichere**, $\varnothing$ das **unmögliche Ereignis**.

Gilt $A \subset B$, so ist A ein **Teilereignis** von B. Mit A und B sind auch der **Durchschnitt** $(A \cap B)$, die **Vereinigung** $(A \cup B)$, und die **Differenz** $(A - B)$ von A und B Ereignisse. Durchschnitt und Vereinigung sind kommutativ, assoziativ und distributiv. Mit dem Ereignis A ist auch das **entgegengesetzte Ereignis** $\overline{A}$ ein Ereignis. Dieses wird auch als **Negation** oder **Komplement** von A bezeichnet. Gilt $A \cap B = \varnothing$, so heißen A und B **disjunkt** oder **unvereinbar**.

Für zwei Ereignisse A und B gelten die **de MORGANschen Formeln**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \ ,$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \ .$$

2 Wahrscheinlichkeit

Die **Definition der Wahrscheinlichkeit von Kolmogoroff**. Ein nichtleeres System $\mathfrak{B}$ von Teilmengen eines Ergebnisraumes Ω heißt **σ-Algebra** (über Ω), wenn gilt

$$A \in \mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathfrak{B} \ ,$$
$$A_n \in \mathfrak{B};\ n = 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B} \ .$$

Aufgrund der de MORGANschen Formeln ist eine σ-Algebra außerdem gegen abzählbare Durchschnittsbildung abgeschlossen.

Ein höchstens abzählbares System $\{A_n \in \mathfrak{B} : A_k \cap A_n = \varnothing,\ k \neq n\}$ heißt **vollständige Ereignisdisjunktion**, wenn gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$.

Kolmogoroffsche Axiome: Gegeben seien ein Ereignisraum Ω und eine geeignete σ-Algebra $\mathfrak{B}$ über Ω. Die Elemente von $\mathfrak{B}$ sind also die Ereignisse eines Zufallsexperiments. Eine Funktion P, die jedem Ereignis $A \in \mathfrak{B}$ eine reelle Zahl zuordnet, erfülle

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1 \ ,$$
$$\mathrm{P}(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathfrak{B} \ ,$$
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) \qquad \text{für paarweise disjunkte Ereignisse } A_n \in \mathfrak{B} \ .$$

$\mathrm{P}(A)$ heißt die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A.

Hieraus folgt

$$\mathrm{P}(\varnothing) = 0 \ ,$$
$$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) \ ,$$
$$0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1 \ ,$$
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \ ,$$
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \qquad \text{für eine vollständige Ereignisdisjunktion } A_n \ .$$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ermöglicht das „Heranzoomen“ im Wahrscheinlichkeitsraum. Statt Ω wird hierbei einfach $B \in \Omega$ als „sicheres Ereignis“, oder genauer als **vorausgesetztes Ereignis**, definiert.

$A, B \in \mathfrak{B}$ und $\mathrm{P}(B) > 0$. Dann heißt

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

Im allgemeinen ist $\mathrm{P}(A \mid B) \neq \mathrm{P}(B \mid A)$. Es gilt die Beziehung

$$\mathrm{P}(A \mid B)\ \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A)\ \mathrm{P}(A)\ .$$

Auflösen nach $\mathrm{P}(A \cap B)$ liefert die **Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten**

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\ \mathrm{P}(B)\ .$$

Die wiederholte Anwendung der Multiplikationsregel auf den Durchschnitt N zufälliger Ereignisse liefert

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=2}^{N} A_n \mid A_1\right) \mathrm{P}(A_1) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=3}^{N} A_n \mid A_2 \cap A_1\right) \mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\ \mathrm{P}(A_1) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=4}^{N} A_n \mid A_3 \cap A_2 \cap A_1\right) \mathrm{P}(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\ \mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\ \mathrm{P}(A_1) \\
&= \mathrm{P}\left(A_N \mid \bigcap_{n=1}^{N-1} A_n\right) \cdots \mathrm{P}(A_4 \mid A_3 \cap A_2 \cap A_1)\ \mathrm{P}(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\ \mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\ \mathrm{P}(A_1)\ .
\end{aligned}$$

Die Ereignisse A_n $(1 \leq n \leq N)$ seien eine vollständige Ereignisdisjunktion und es gelte $\mathrm{P}(A_n) > 0\ \forall n$. Dann folgt für jedes $B \in \mathfrak{B}$ die **Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit**

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(B \mid A_n)\, \mathrm{P}(A_n)$$

und, wenn $\mathrm{P}(B) > 0$ ist, die **Formel von Bayes**

$$\mathrm{P}(A_n \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A_n)\, \mathrm{P}(A_n)}{\sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{P}(B \mid A_k)\, \mathrm{P}(A_k)}\ .$$

Im allgemeinen wird $\mathrm{P}(A) \neq \mathrm{P}(A \mid B)$ sein. Gilt aber für $A, B \in \mathfrak{B}$

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)\ ,$$

so heißt A **unabhängig** von B. Für unabhängige Ereignisse folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(A \mid B)\, \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)\, \mathrm{P}(B)\ , \\
\mathrm{P}(B \mid A) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(B)\ .
\end{aligned}$$

4 Zufallsvariablen

Eine **Zufallsvariable** ist eine numerische Beschreibung des Ergebnisses eines Zufallsexperiments, so dass man damit (fast) wie gewohnt rechnen kann. Auf den ersten Blick könnte man meinen, Zufallsvariablen seien Variablen, die zufällige Werte annehmen. Tatsächlich sind Zufallsvariablen aber weder zufällig noch Variablen. Es handelt sich vielmehr um eine **Funktion** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$, die ein Ereignis ω aus einem Ereignisraum Ω (z.B. die möglichen Augenzahlen beim Würfeln) in den Raum $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen abbildet. Die Zufallsvariable liefert eine Zahl $x_0 = \boldsymbol{x}(\omega_0)$ für jedes Elementarereignis $\omega_0 \in \Omega$. Die Umkehrabbildung $\boldsymbol{x}^{-1}$ muss jedem Intervall $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$ ein Ereignis aus der σ-Algebra $\mathfrak{B}$ über Ω zuordnen, also ein Elementarereignis oder eine Vereinigung mehrerer Elementarereignisse.

Zufallsvariablen werden auf den SI-Übungsblättern durch kleine, fettgedruckte Buchstaben gekennzeichnet, z.B. $\boldsymbol{x}$. (Jedoch wird diese Notation nicht im SI-Skript umgesetzt, und auch nicht auf den handschriftlichen Mitschrieben, sodass Zufallsvariablen und „normale“ Variablen meistens aus dem Kontext heraus unterschieden werden müssen.)

Ist die Elementarereignismenge oder die Menge des Wertebereichs einer Zufallsvariablen endlich oder höchstens abzählbar unendlich, so heißt die Zufallsvariable **diskret**. Im Falle einer überabzählbaren Ereignis- und Wertemenge bezeichnet man die Zufallsvariable als **kontinuierlich**. Das bedeutet es gibt überabzählbar unendlich viele verschiedene Elementarereignisse, und die Zufallsvariable kann überabzählbar unendlich viele verschiedene Werte annehmen.

5 Verteilungsfunktion und Dichte

Wir hatten für die Zufallsvariable vorausgesetzt, dass $\boldsymbol{x}^{-1}((-\infty, a]) \in \mathfrak{B}$, d.h. die Umkehrfunktion der Zufallsvariable bildet jedes linksseitig unendliche abgeschlossene Intervall auf ein gültiges Ereignis aus der σ-Algebra ab. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist nun genau die **Verteilungsfunktion** oder **kumulative Wahrscheinlichkeitsdichte** $F_{\boldsymbol{x}}(x)$ der Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}$

$$F_{\boldsymbol{x}}(x) := \mathrm{P}(\boldsymbol{x} \leq x) \ .$$

Für die Verteilungsfunktion gelten $F_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{\boldsymbol{x}}(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F_{\boldsymbol{x}}(x) = 1$. Außerdem ist $F_{\boldsymbol{x}}(x)$ monoton steigend und rechtsseitig stetig.

Stellt $\boldsymbol{x}$ eine diskrete Zufallsvariable dar, so ergibt sich für deren Verteilungsfunktion immer eine Treppenfunktion.

Eine Zufallsvariable $\boldsymbol{x}$ heißt **stetig**, wenn eine integrierbare Funktion $f_{\boldsymbol{x}}(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ existiert, sodass sich die Verteilungsfunktion $F_{\boldsymbol{x}}(x)$ in der Form

$$F_{\boldsymbol{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\boldsymbol{x}}(u) \ \mathrm{d}u$$

schreiben lässt. $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ heißt **Dichte** von $\boldsymbol{x}$.

Aus $\lim_{x \to \infty} F_{\boldsymbol{x}}(x) = 1$ folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{x}}(x) \ \mathrm{d}x = 1 \ .$$

$f_{\boldsymbol{x}}(x)$ gibt also an, wie die Wahrscheinlichkeitsmasse 1 über die x-Achse verteilt ist.

Man schreibt für die „Dichte“ einer diskreten Zufallsvariablen, deren **Einzelwahrscheinlichkeiten** $p_n = \mathrm{P}(\boldsymbol{x} = x_n)$ gegeben sind, auch

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\boldsymbol{x} = x_n) \, \delta(x - x_n) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, \delta(x - x_n) \ .$$

Damit gilt sowohl für kontinuierliche als auch für diskrete Zufallsvariablen der Zusammenhang

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\boldsymbol{x}}(x) = f_{\boldsymbol{x}}(x) \ .$$

Dabei wird die **Delta-Distribution** $\delta(x)$ (nach Paul Dirac, 1902-1984) verwendet, die für $\mathbf{C}^{\infty}$-Funktionen $f(x)$ definiert ist als

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \, \mathrm{d}x = f(0) \ .$$

6 Erwartungswert

Der **Erwartungswert** kann interpretiert werden als Mittelwert aller möglichen Werte x_n, die eine (diskrete) Zufallsvariable $\boldsymbol{x}$ annehmen kann. Dabei werden die Werte entsprechend ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit p_n gewichtet. Da die Summe über alle p_n immer 1 ergibt, ist dieser Mittelwert automatisch normiert $\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}\} = \sum_{n=1}^{N} x_n \, p_n$. Für kontinuierliche Zufallsvariablen integriert man entsprechend über die Dichtefunktion

$$\mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{x}}}\{\boldsymbol{x}\} \;=\; \hat{\boldsymbol{x}} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{\boldsymbol{x}}(x) \, \mathrm{d}x \;\; .$$

Genauso lässt sich auch der Erwartungswert für **Funktionen einer Zufallsvariable** definieren, um also zu berechnen, welchen Wert die Funktion einer Zufallsvariablen erwartungsgemäß annimmt

$$\mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{x}}}\{g(\boldsymbol{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, f_{\boldsymbol{x}}(x) \, \mathrm{d}x \;\; .$$

Quelle [JW02].
Weitere Informationen [Hen17], [Pap84].

7 Aufgaben

1) Ereignisse
[JW02]
Drei Bits werden über einen digitalen Nachrichtenkanal übertragen. Jedes Bit kann verfälscht oder richtig empfangen werden.

a) Geben Sie den Ereignisraum Ω an.

b) Es sei $A_i = \{\text{i-tes Bit verfälscht}\}$. Geben Sie das Ereignis A_3 an.

c) Stellen Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der A_i und passender Mengenoperationen dar:
- $B_1 = \{\text{alle Bits sind verfälscht}\}$
- $B_2 = \{\text{mindestens ein Bit ist verfälscht}\}$
- $B_3 = \{\text{kein Bit ist verfälscht}\}$
- $B_4 = \{\text{höchstens ein Bit ist verfälscht}\}$

d) Beschreiben Sie verbal folgende Ereignisse:
- $C_1 = A_1 \cap (\overline{A_2 \cap A_3})$
- $C_2 = (\overline{A_3} \cap A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_2} \cap A_1 \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$

2) Wahrscheinlichkeit
[JW02]
Ein elektronisches Schaltnetz (Abb. 1) besteht aus drei Relais. Jedes Relais ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 geschlossen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Strom vom Eingang E zum Ausgang A fließen?

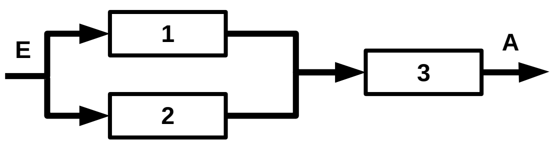

Abbildung 1: Schaltnetz.

3) Bedingte Wahrscheinlichkeiten I

[JW02] / [Bei95]

80 % der in einer Radaranlage eintreffenden Signale sind mit einer Störung überlagerte Nutzsignale und 20 % sind reine Störungen. Aus Erfahrung weiß man, dass beim Empfang eines gestörten Nutzsignals die Anlage die Ankunft eines Nutzsignals mit Wahrscheinlichkeit 0,95 anzeigt. Beim Empfang der reinen Störung zeigt sie die Ankunft eines Nutzsignals mit Wahrscheinlichkeit 0,3 an.

Die Anlage zeige nun die Ankunft eines Nutzsignals an. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wirklich ein gestörtes Nutzsignal empfangen wurde, d.h. dass die Anlage eine richtige Anzeige macht.

4) Bedinge Wahrscheinlichkeiten II

[JW02] / [Bos96]

Bei einer Qualitätskontrolle können Werkstücke zwei Fehler haben, den Fehler A und den Fehler B. Aus Erfahrung seien folgende Werte bekannt: Mit Wahrscheinlichkeit 0,05 hat ein Werkstück den Fehler A, mit Wahrscheinlichkeit 0,01 hat es beide Fehler und mit Wahrscheinlichkeit 0,03 nur den Fehler B.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Werkstück den Fehler B?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Werkstück fehlerhaft bzw. fehlerfrei?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt ein Werkstück genau einen der beiden Fehler?

d) Bei einem Werkstück wurde der Fehler A festgestellt, während die Untersuchung auf Fehler B noch nicht erfolgt ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch den Fehler B bzw. nicht den Fehler B?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Werkstück fehlerfrei, falls es den Fehler B (bzw. A) nicht besitzt?

f) Sind die Ereignisse „Fehler A“ und „Fehler B“ unabhängig?

5) Zufallsvariablen

Geben Sie zwei mögliche Zufallsvariablen für den Wurf eines Würfels an.

6) Verteilungsfunktion und Dichte

[JW02] / [Bos95]

Die Zufallsvariable $\boldsymbol{x}$ besitze die Dichte $f_{\boldsymbol{x}}(x) = ce^{-\rho|x|}, \ \rho > 0$.

a) Man bestimme den Koeffizienten c .

b) Man bestimme die Verteilungsfunktion $F_{\boldsymbol{x}}(x)$.

7) Erwartungswert

a) Berechnen Sie die folgenden Erwartungswerte.
- $\mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{x}}}\{\delta(\boldsymbol{x} - x_0)\}$
- $\mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{x}}}\{\delta(a \cdot (\boldsymbol{x} - x_0))\}$

b) Zeigen Sie [MK12]

$$\mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{x}}}\{\delta(g(\boldsymbol{x}))\} \ = \ \sum_i \frac{f_{\boldsymbol{x}}(x_i)}{|g'(x_i)|} \ , \quad \text{mit } g(x_i) = 0 \text{ und } g'(x_i) \neq 0 \ .$$

c) Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ lässt sich darstellen als $f_{\boldsymbol{x}}(x) = \mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{x}}}\{\delta(\boldsymbol{x} - x)\}$. Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ von $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ mit

$$f_{\boldsymbol{y}}(y) \ = \ \mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{y}}}\{\delta(\boldsymbol{y} - y)\} \ = \ \mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{x}}}\{\delta(g(\boldsymbol{x}) - y)\} \ .$$

Literatur

[Bei95] F. Beichelt. *Stochastik für Ingenieure*. Teubner, 1995.

[Bos95] K. Bosch. *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Vieweg & Sohn, 1995.

[Bos96] K. Bosch. *Klausurtraining Statistik*. Oldenbourg, 1996.

[Hen17] N. Henze. *Stochastik für Einsteiger*. Springer, 2017.

[JW02] F. Jondral and A. Wiesler. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*. Teubner, 2002.

[MK12] P. Marquard and J. Kühn. Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I (KIT), 2012.

[Pap84] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw–Hill, 1984.