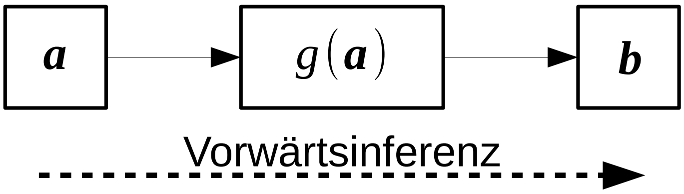
Stochastische Informationsverarbeitung
Wintersemester 2017 / 2018
Daniel Frisch
10. Übungsblatt

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS)
Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck
http://isas.uni-karlsruhe.de

Vorwärtsinferenz



1) Vorwärtsinferenz ohne Vorwissen über $\boldsymbol{b}$

Es sei die Messabbildung

$$\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a}) = 3\boldsymbol{a}^2$$

gegeben.

a) Geben Sie das probabilistische Modell $f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a)$ an.

b) Berechnen Sie die Dichtefunktion $f_{\boldsymbol{b}}(b)$ in Abhängigkeit von $f_{\boldsymbol{a}}(a)$.

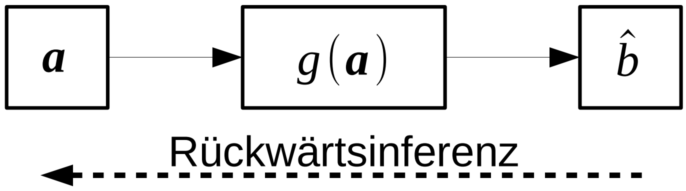
c) Geben Sie $f_{\boldsymbol{b}}(b)$ an, wenn $\boldsymbol{a}$ normalverteilt ist.

d) Es sei nun eine normalverteilte unsichere Beobachtung für $\boldsymbol{a}$ mit $\hat{a} = 2$ und $\sigma_{\boldsymbol{a}} = 0{,}5$ gegeben. Plotten Sie die entstehende Dichte $f_{\boldsymbol{b}}(b)$ in Matlab. Definieren Sie dazu die anonyme Funktion `fb(b)` für die Dichte und plotten Sie diese mit `fplot`. Integrieren Sie `fb(b)` außerdem numerisch über den gesamten Definitionsbereich mit der Funktion `integral` um zu prüfen, ob die Dichte zu 1 integriert.

e) Gegeben sei nun eine exakte Beobachtung $\hat{a} = 2$. Wie lautet die zugehörige Dichtefunktion $f_{\boldsymbol{a}}(a)$?

f) Berechnen Sie $f_{\boldsymbol{b}}(b)$ für diese exakte Beobachtung.

Rückwärtsinferenz



2) Konkrete Messung I

Gegeben sei eine Messabbildung mit

$$\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^3 \ .$$

a) Berechnen sie die bedingte Dichtefunktion

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b}) \ .$$

b) Versuchen Sie, das gleiche Ergebnis zu erhalten, indem Sie das generative Vorwärtsmodell invertieren und einfach damit die probabilistische Systembeschreibung des inversen Systems aufstellen.

c) Berechnen Sie

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b} = 8) \ .$$

3) Konkrete Messung II

Gegeben sei noch einmal die Messabbildung aus Aufgabe 1. Führen Sie auch hier eine Rückwärtsinferenz mit konkretem Messwert durch.

$$\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a}) = 3\boldsymbol{a}^2$$

a) Berechnen Sie die bedingte Dichtefunktion

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, b) \ .$$

b) Berechnen Sie

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b} = 12) \ .$$

c) Vereinfachen Sie $f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b} = 12)$ für den Fall, dass kein Vorwissen über $f_{\boldsymbol{a}}(a)$ vorliegt.

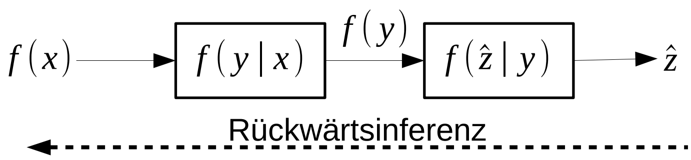
4) Unsichere Messung

Gegeben sei eine Messabbildung mit

$$\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x}} \ .$$

Berechnen Sie hier die Rückwärtsinferenz einer unsicheren Messung. Diese Messung sei gegeben durch eine Standardnormalverteilung ($\widehat{y} = 0,\ \sigma_{\boldsymbol{y}} = 1$).

a) Zunächst erweitern wir das System um eine zusätzliche stochastische Abbildung und einen festen Ausgang $\widehat{z}$.



Berechnen Sie eine probabilistische Abbildung $f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z} \,|\, y)$, so dass $f_{\boldsymbol{y}}(y \,|\, \widehat{z})$ die gewünschte Standardnormalverteilung ist. Gehen Sie dabei davon aus, dass kein Vorwissen über $\boldsymbol{x}$ bekannt ist.

b) Berechnen Sie nun die Rückwärtsinferenz $f_{\boldsymbol{x}}(x \,|\, \widehat{z})$, ebenfalls ohne Vorwissen über $\boldsymbol{x}$ anzunehmen.

c) Nun sei ein Vorwissen über $\boldsymbol{x}$ in Form von $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ bekannt. Berechnen Sie erneut $f(\widehat{z} \,|\, y)$, so dass $f(y \,|\, z)$ die Standardnormalverteilung ist.

d) Berechnen Sie die Rückwärtsinferenz $f(x \,|\, \widehat{z})$ unter Berücksichtigung des Vorwissens über $\boldsymbol{x}$.