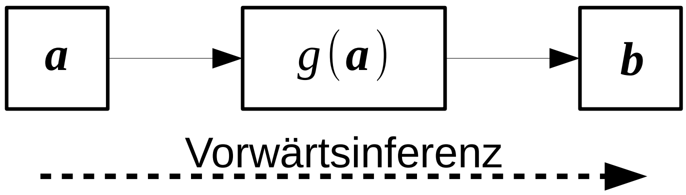
Vorwärtsinferenz



1) Vorwärtsinferenz ohne Vorwissen über $\boldsymbol{b}$

Es sei die Messabbildung

$$\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a}) = 3\boldsymbol{a}^2$$

gegeben.

a) Geben Sie das probabilistische Modell $f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a)$ an.

$$f_{\boldsymbol{b}}(b|a) = \underline{\underline{\delta(b - 3a^2)}} \ .$$

b) Berechnen Sie die Dichtefunktion $f_{\boldsymbol{b}}(b)$ in Abhängigkeit von $f_{\boldsymbol{a}}(a)$.

$$f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a) = \delta(b - 3a^2) \quad \text{Bedingte Wahrscheinlichkeit / Multiplikationsregel}$$

$$f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(a, b) = f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a) f_{\boldsymbol{a}}(a) \quad a \text{ herausintegrieren / Marginalisierung / Randdichte}$$

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{b}}(b) &= \int_{\mathbb{R}} f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(a, b) \ \mathrm{d}a \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(\underbrace{b - 3a^2}_{g(a)}) \, f_{\boldsymbol{a}}(a) \ \mathrm{d}a \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Rechenregel für Verkettung bei der Deltafunktion.

$$\begin{aligned} \delta(g(x)) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \ , \\ g(x_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N \ , \\ g'(x_i) &\neq 0 \ . \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$g(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \sqrt{\frac{b}{3}}, \quad a_2 = -\sqrt{\frac{b}{3}}$$

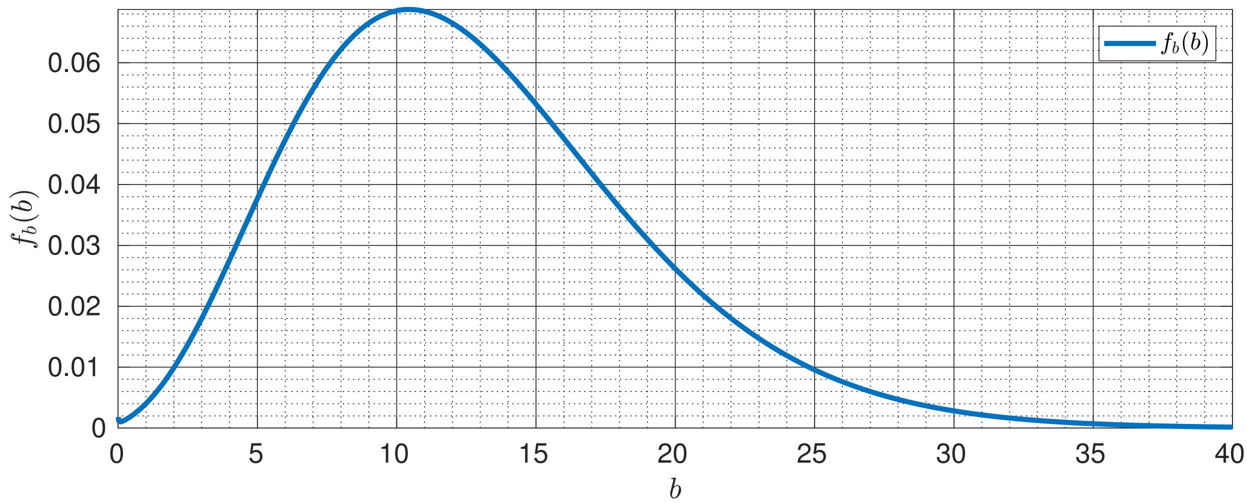
$$g'(a) = -6a \quad \Rightarrow \quad g'(a_1) = -6 \cdot \sqrt{\frac{b}{3}}, \qquad g'(a_2) = 6 \cdot \sqrt{\frac{b}{3}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f_{\boldsymbol{b}}(b) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\left| -6\sqrt{\frac{b}{3}} \right|} \delta\left(a - \sqrt{\frac{b}{3}} \right) + \frac{1}{\left| 6\sqrt{\frac{b}{3}} \right|} \delta\left(a + \sqrt{\frac{b}{3}} \right) \right) f_{\boldsymbol{a}}(a) \ \mathrm{d}a \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{b}} \cdot \left(f_{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{3}} \right) + f_{\boldsymbol{a}}\left(-\sqrt{\frac{b}{3}} \right) \right)}} \ . \end{aligned}$$

c) Geben Sie $f_{\boldsymbol{b}}(b)$ an, wenn $\boldsymbol{a}$ normalverteilt ist.

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{a}}(a) &= \mathcal{N}(a - \hat{a},\ \sigma_{\boldsymbol{a}}^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{a-\hat{a}}{\sigma_a} \right)^2 \right\} \\
\Rightarrow \quad f_{\boldsymbol{b}}(b) &= \underline{\underline{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\boldsymbol{a}}} \cdot \left(\exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\frac{b}{3}} - \hat{a}}{\sigma_{\boldsymbol{a}}} \right)^2 \right\} + \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{-\sqrt{\frac{b}{3}} - \hat{a}}{\sigma_{\boldsymbol{a}}} \right)^2 \right\} \right)}}
\end{aligned}
$$

d) Es sei nun eine normalverteilte unsichere Beobachtung für $\boldsymbol{a}$ mit $\hat{a} = 2$ und $\sigma_{\boldsymbol{a}} = 0{,}5$ gegeben. Plotten Sie die entstehende Dichte $f_{\boldsymbol{b}}(b)$ in Matlab. Definieren Sie dazu die anonyme Funktion `fb(b)` für die Dichte und plotten Sie diese mit `fplot`. Integrieren Sie `fb(b)` außerdem numerisch über den gesamten Definitionsbereich mit der Funktion `integral` um zu prüfen, ob die Dichte zu 1 integriert.



```matlab
%% Dichte Funktionshandle

% Definitionen
sigma_a = .5;
a_0 = 2;

% Dichtefunktion als Handle
fb = @(b) 1/6 * 1/(sqrt(2*pi)*sigma_a) * sqrt(3./b) .* ...
    ( exp(-.5*((sqrt(b./3)-a_0)/sigma_a).^2) + ...
    exp(-.5*((-sqrt(b./3)-a_0)/sigma_a).^2) );

integral(fb, 0,Inf) % Integral über Definitionsbereich == 1
b_0 = integral(@(b) b.*fb(b), 0,Inf); % Erwartungswert
sigma_b = sqrt(integral(@(b) (b-b_0).^2.*fb(b), 0,Inf)); % Standardabweichung

% Figure öffnen
fig = figure('Color','white', 'DefaultAxesFontSize',16);
ax = axes;

% Dichte plotten
fp = fplot(fb);
fp.DisplayName = '$f_b(b)$';
fp.LineWidth = 3;
fp.MeshDensity = 100;
fp.XRange=[0,3*a_0^2*3];
fp.XRangeMode = 'auto';

% Achsenbeschriftung
grid(ax,'on')
grid(ax,'minor')
ax.GridAlpha = 1;
ax.MinorGridAlpha = 1;
l = legend;
l.Interpreter = 'Latex';
xlabel('$b$', 'Interpreter','Latex')
ylabel('$f_b(b)$', 'Interpreter','Latex')
fig.Position(3) = fig.Position(3)*2;

% Figure speichern (benötigt export_fig)
% export_fig('images/fb.pdf', fig)
```

e) Gegeben sei nun eine exakte Beobachtung $\hat{a} = 2$. Wie lautet die zugehörige Dichtefunktion $f_{\boldsymbol{a}}(a)$?

$$f_{\boldsymbol{a}}(a) = \underline{\underline{\delta(a-2)}} \ .$$

f) Berechnen Sie $f_{\boldsymbol{b}}(b)$ für diese exakte Beobachtung.

$$f_{\boldsymbol{b}}(b) = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{b}}\left(\delta\left(\underbrace{\sqrt{\frac{b}{3}}-2}\right)+\delta\left(-\sqrt{\frac{b}{3}}-2\right)\right) \ ,$$

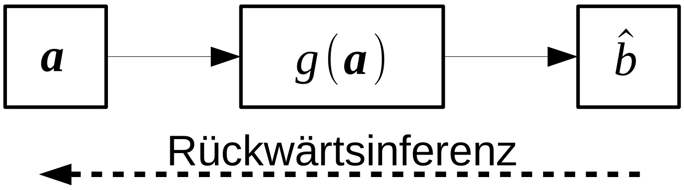
$$\sqrt{\frac{b}{3}} - 2 = 0 \Rightarrow b = 12$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\sqrt{\frac{b}{3}} - 2\right) = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{b}}$$
$$\Rightarrow \qquad \delta\left(\sqrt{\frac{b}{3}} - 2\right) = 12\,\delta(b-12) \ .$$

$\delta\left(-\sqrt{\frac{b}{3}} - 2\right)$ hat keine reelle Nullstelle. Daher gilt

$$f_{\boldsymbol{b}}(b) = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{b}}\,(12 \cdot \delta(b-12))$$
$$f_{\boldsymbol{b}}(b) = \underline{\underline{\delta(b-12)}} \ .$$

Dies entspricht dem Ergebnis, wenn man einfach das generative Systemmodell auswertet: für den Input $\hat{a} = 2$ bekommen wir $b = 3 \cdot 2^2 = 12$ als deterministisches Ergebnis.

Rückwärtsinferenz



2) Konkrete Messung I

Gegeben sei eine Messabbildung mit

$$\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^3 \ .$$

a) Berechnen sie die bedingte Dichtefunktion

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b}) \ .$$

$$f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a) = \delta(b - a^3) \quad \text{Bedingte Wahrscheinlichkeit / Multiplikationsregel}$$

$$f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(a, b) = \delta(b - a^3)\, f_{\boldsymbol{a}}(a) \quad \text{Bedingte Wahrscheinlichkeit}$$

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, b) = \frac{\delta(b - a^3)\, f_{\boldsymbol{a}}(a)}{f_{\boldsymbol{b}}(b)} \quad f_{\boldsymbol{b}}(b) = \int f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(a, b)\, \mathrm{d}a$$

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, b) = \frac{\delta(b - a^3)\, f_{\boldsymbol{a}}(a)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(b - a^3)\, f_{\boldsymbol{a}}(a)\, \mathrm{d}a}$$

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(b - a^3)\, f_{\boldsymbol{a}}(a)\, \mathrm{d}a = \frac{1}{\left| -3\, b^{\frac{2}{3}} \right|} f_{\boldsymbol{a}}(\sqrt[3]{b}) = \tfrac{1}{3} b^{-\frac{2}{3}}\ f_{\boldsymbol{a}}(\sqrt[3]{b}) = f_{\boldsymbol{b}}(b) \right.$$

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b}) = \frac{3\, \hat{b}^{\frac{2}{3}}}{f_{\boldsymbol{a}}(\sqrt[3]{\hat{b}})}\, \delta(\hat{b} - a^3)\, f_{\boldsymbol{a}}(a) \quad [f_{\boldsymbol{a}}(a)]_{\hat{b} = a^3} = f_{\boldsymbol{a}}(\sqrt[3]{\hat{b}})$$

$$= \underline{\underline{3\, \hat{b}^{\frac{2}{3}}\, \delta(\hat{b} - a^3)}}$$

Man kann das Argument der Deltafunktion auch umstellen, sodass die unabhängige Variable a direkt als Term dasteht und man die Nullstelle besser erkennen kann. Dazu muss die generative Systembeschreibung $g(a)$ allerdings invers evaluiert werden, was hier jedoch problemlos möglich ist.

$$\delta(\hat{b} - a^3) = \tfrac{1}{3} \hat{b}^{-\frac{2}{3}}\, \delta(a - \sqrt[3]{\hat{b}})$$

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b}) = 3\, \hat{b}^{\frac{2}{3}}\, \tfrac{1}{3} \hat{b}^{-\frac{2}{3}}\, \delta(a - \sqrt[3]{\hat{b}})$$

$$= \underline{\underline{\delta(a - \sqrt[3]{\hat{b}})}}$$

b) Versuchen Sie, das gleiche Ergebnis zu erhalten, indem Sie das generative Vorwärtsmodell invertieren und einfach damit die probabilistische Systembeschreibung des inversen Systems aufstellen.

$$\text{Generativ:} \quad \boldsymbol{a} = g^{-1}(\boldsymbol{b}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{b}}$$

$$\text{Probabilistisch:} \quad f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, b) = \delta(a - \sqrt[3]{b})$$

Die probabilistischen Modelle stimmen genau überein. Wenn die Deltadistribution ohne Vorfaktor auskommen soll, muss die abhängige Variable direkt ohne Vorfaktor oder Verkettung vorkommen. Das Integral über diese Variable (hier a) muss schließlich 1 ergeben. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} b^{-\frac{2}{3}} \delta(a - \sqrt[3]{b}) \;&=\; f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a) \;=\; \delta(b - a^3) \\ \delta(a - \sqrt[3]{b}) \;&=\; f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, b) \;=\; 3\, b^{\frac{2}{3}}\, \delta(b - a^3) \ .\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b} = 8) \ .$$

$$f(a \,|\, \hat{b} = 8) = \delta\left(a - \sqrt[3]{8}\right) = \underline{\underline{\delta(a-2)}} \ .$$

3) Konkrete Messung II

Gegeben sei noch einmal die Messabbildung aus Aufgabe 1. Führen Sie auch hier eine Rückwärtsinferenz mit konkretem Messwert durch.

$$\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a}) = 3\boldsymbol{a}^2$$

a) Berechnen Sie die bedingte Dichtefunktion

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, b) \ .$$

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a) &= \delta(b - 3a^2) \qquad \text{umformen} \\
(b - 3a^2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = \sqrt{\frac{b}{3}}; \quad a_2 = -\sqrt{\frac{b}{3}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(b - 3a^2) = -6a \quad &\Rightarrow \quad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(b - 3a^2)\right]_{a=a_1} = -6 \cdot \sqrt{\frac{b}{3}}; \quad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(b - 3a^2)\right]_{a=a_2} = 6 \cdot \sqrt{\frac{b}{3}} \\
f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a) &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{b}} \left(\delta(a - \sqrt{\tfrac{b}{3}}) \;-\; \delta(a + \sqrt{\tfrac{b}{3}})\right) \qquad \text{Bayes} \\
f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, b) &= \frac{1}{f_{\boldsymbol{b}}(b)}\, f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a)\, f_{\boldsymbol{a}}(a) \\
&= \frac{f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a)\, f_{\boldsymbol{a}}(a)}{\int_{\mathbb{R}} f_{\boldsymbol{b}}(b \,|\, a)\, f_{\boldsymbol{a}}(a)\, \mathrm{d}a} \\
&= \frac{\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{b}} \left(\delta(a - \sqrt{\tfrac{b}{3}}) \;+\; \delta(a + \sqrt{\tfrac{b}{3}})\right) f_{\boldsymbol{a}}(a)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{b}} \left(\delta(a - \sqrt{\tfrac{b}{3}}) \;+\; \delta(a + \sqrt{\tfrac{b}{3}})\right) f_{\boldsymbol{a}}(a)\, \mathrm{d}a} \\
&= \underline{\underline{\frac{\delta(a - \sqrt{\tfrac{b}{3}})\, f_{\boldsymbol{a}}(\sqrt{\tfrac{b}{3}}) \;+\; \delta(a + \sqrt{\tfrac{b}{3}})\, f_{\boldsymbol{a}}(-\sqrt{\tfrac{b}{3}})}{f_{\boldsymbol{a}}(\sqrt{\tfrac{b}{3}}) \;+\; f_{\boldsymbol{a}}(-\sqrt{\tfrac{b}{3}})}}}
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie

$$f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b} = 12) \ .$$

$$\begin{aligned}
\hat{b} = 12 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{\tfrac{\hat{b}}{3}} = 2 \\
f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b}) &= \underline{\underline{\frac{\delta(a-2)\, f_{\boldsymbol{a}}(2) \;+\; \delta(a+2)\, f_{\boldsymbol{a}}(-2)}{f_{\boldsymbol{a}}(2) \;+\; f_{\boldsymbol{a}}(-2)}}}
\end{aligned}$$

c) Vereinfachen Sie $f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b} = 12)$ für den Fall, dass kein Vorwissen über $f_{\boldsymbol{a}}(a)$ vorliegt.

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{a}}(2) &= f_{\boldsymbol{a}}(-2) \\
f_{\boldsymbol{a}}(a \,|\, \hat{b}) &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\delta(a-2) \;+\; \delta(a+2)\right)}}
\end{aligned}
$$

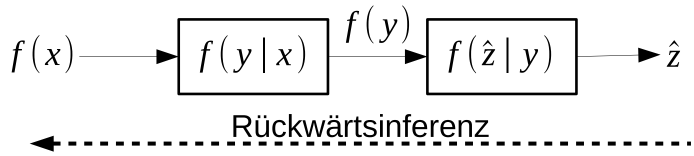
4) Unsichere Messung

Gegeben sei eine Messabbildung mit

$$
\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x}} \ .
$$

Berechnen Sie hier die Rückwärtsinferenz einer unsicheren Messung. Diese Messung sei gegeben durch eine Standardnormalverteilung $(\widehat{y} = 0,\ \sigma_{\boldsymbol{y}} = 1)$.

a) Zunächst erweitern wir das System um eine zusätzliche stochastische Abbildung und einen festen Ausgang $\widehat{z}$.



Berechnen Sie eine probabilistische Abbildung $f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z} \,|\, y)$, so dass $f_{\boldsymbol{y}}(y \,|\, \widehat{z})$ die gewünschte Standardnormalverteilung ist. Gehen Sie dabei davon aus, dass kein Vorwissen über $\boldsymbol{x}$ bekannt ist.

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{y}}(y \,|\, \widehat{z}) &= \frac{f_{\boldsymbol{y}}(y, \widehat{z})}{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{y}}(x, y, \widehat{z}) \,\mathrm{d}x}{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z} \,|\, y)\, f_{\boldsymbol{y}}(y \,|\, x)\, f_{\boldsymbol{x}}(x) \,\mathrm{d}x}{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})} \qquad | \ f_{\boldsymbol{x}}(x) = f_{\boldsymbol{x}} = const \\
&= \frac{1}{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})} \cdot f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z} \,|\, y) \cdot f_{\boldsymbol{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - \sqrt{x}) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})} \cdot f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z} \,|\, y) \cdot f_{\boldsymbol{x}} \cdot 2\,|y| \overset{!}{=} \mathcal{N}(y - 0,\ 1) \\
\Rightarrow \quad f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z} \,|\, y) &= \underline{\underline{\frac{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})}{2\,|y|\, f_{\boldsymbol{x}}} \cdot \mathcal{N}(y - 0,\ 1)}}
\end{aligned}
$$

b) Berechnen Sie nun die Rückwärtsinferenz $f_{\boldsymbol{x}}(x \,|\, \widehat{z})$, ebenfalls ohne Vorwissen über $\boldsymbol{x}$ anzunehmen.

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{x}}(x \,|\, \widehat{z}) &= \frac{1}{f_{\boldsymbol{z}}(z)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \widehat{z}) \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{f_{\boldsymbol{z}}(z)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z} \,|\, y)\, f_{\boldsymbol{y}}(y \,|\, x)\, f_{\boldsymbol{x}}(x) \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{f_{\boldsymbol{z}}(z)} \cdot f_{\boldsymbol{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})}{2\,|y|\, f_{\boldsymbol{x}}} \cdot \mathcal{N}(y - 0,\ 1) \cdot \delta(y - \sqrt{x}) \,\mathrm{d}y \\
&= \underline{\underline{\frac{\mathcal{N}(\sqrt{x} - 0,\ 1)}{2\sqrt{x}}}}
\end{aligned}
$$

c) Nun sei ein Vorwissen über $\boldsymbol{x}$ in Form von $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ bekannt. Berechnen Sie erneut $f(\widehat{z} \,|\, y)$, so dass $f(y \,|\, z)$ die Standardnormalverteilung ist.

$$f_{\boldsymbol{y}}(\widehat{z} \,|\, y) = \underline{\underline{\frac{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})}{2\,|y|\, f_{\boldsymbol{x}}(y^2)} \cdot \mathcal{N}(y - 0,\ 1)}}$$

d) Berechnen Sie die Rückwärtsinferenz $f(x \,|\, \widehat{z})$ unter Berücksichtigung des Vorwissens über $\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{x}}(x \,|\, \widehat{z}) &= \frac{1}{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z} \,|\, y)\, f_{\boldsymbol{y}}(y \,|\, x)\, f_{\boldsymbol{x}}(x)\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\boldsymbol{z}}(\widehat{z})}{2\,|y|\, f_{\boldsymbol{x}}(y^2)} \cdot \mathcal{N}(y - 0,\ 1) \cdot \delta(y - \sqrt{x}) \cdot f_{\boldsymbol{x}}(x)\, \mathrm{d}y \\
&= \underline{\underline{\frac{\mathcal{N}(\sqrt{x} - 0,\ 1)}{2\sqrt{x}}}}
\end{aligned}$$

Auch hier haben wir wieder ein deterministisches und eindeutig invertierbares Systemmodell, und das Vorwissen über $\boldsymbol{x}$ kürzt sich heraus, weil die Dichte $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ nur an einer Stelle ausgewertet wird.