

Zustandsschätzung im Fall simultan auftretender mengenbasierter und stochastischer Unsicherheiten

State Estimation in Case of Mixed Set Theoretic and Stochastic Uncertainties

Uwe D. Hanebeck, Technische Universität München, und Joachim Horn, Siemens AG, München

Dieser Beitrag stellt ein neuartiges Filter zur Schätzung des Zustands eines zeitvarianten linearen dynamischen Systems für den Fall vor, dass sowohl im Systemeingang als auch in der Messung simultan zwei unterschiedliche Unsicherheitsformen auftreten. Die erste Unsicherheit ist durch einen stochastischen Prozess mit bekannter Charakteristik gegeben. Die zweite wird nur durch ihre Wertbegrenzung beschrieben, die Verteilungsdichte ist jedoch unbekannt. Das neue Filter verallgemeinert bekannte Konzepte wie das Kalman-Filter und das mengenbasierte Filter, und umfasst diese als Grenzfälle. Zwei Anwendungen des neuen Filters auf Probleme in der Robotik werden vorgestellt.

This paper presents a new approach for estimating the state of a time-variant linear dynamic system when the system input and the measurements suffer from two different types of uncertainties simultaneously. The first type of uncertainty is a stochastic process with given characteristics. The second type of uncertainty is only known to be bounded, the underlying distribution is unknown. The new estimator generalizes Kalman filtering and set theoretic filtering and contains these filters as special cases. Two applications in robotics are discussed.

1 Einleitung

Die Bestimmung des Zustands eines dynamischen Systems aus unsicheren Beobachtungen ist ein Standardproblem in vielen Disziplinen. Ein typisches Beispiel ist die Berechnung der Position eines Kraftfahrzeugs auf der Basis von GPS-Daten oder Bildinformationen.

Üblicherweise wird eine stochastische Beschreibung der auftretenden Unsicherheiten gewählt und ein Kalman-Filter oder eine seiner vielen Variationen [1; 2; 11] zur Zustandsschätzung verwendet.

In vielen Fällen ist jedoch eine stochastische Systembeschreibung nicht zweckmäßig oder sogar unsinnig. Dies ist etwa der Fall bei deterministischen oder systematischen Fehlern oder bei Unsicherheiten, die durch nichtmodelierte Nichtlinearitäten entstehen; ein weiteres augenfälliges Beispiel sind Quantisierungsfehler. In diesen Fällen können eher Schranken für die Fehler angegeben werden. Der Einsatz eines Kalman-Filters bei Vorliegen derartiger wertbegrenzter Unsicherheiten führt in der Regel nicht zu guten Resultaten. Außerdem liefert das Kalman-Filter auch nicht die für ein solches Unsicherheitsmodell wünschens-

werte Worst-Case-Abschätzung für das Ergebnis. Glücklicherweise existieren für diesen Zweck aber spezifischere, mengenbasierte Zustandsschätzer [3; 13], die sich auch in praktischen Applikationen bewährt haben.

Treten nun mengenbasierte und stochastische Unsicherheiten simultan auf, führt die Anwendung sowohl des mengenbasierten Filters als auch des Kalman-Filters im Allgemeinen zu keinem sinnvollen Ergebnis. Im Fall des Kalman-Filters müsste die mengenbasierte Unsicherheit durch eine stochastische Unsicherheit approximiert werden, was in den meisten Fällen schwierig ist. Im Fall des mengenbasierten Filters wäre die stochastische Unsicherheit durch Wertbegrenzungen zu beschreiben, was insbesondere bei schwach abklingenden Verteilungsdichtefunktionen zu einer unsinnig konservativen Beschreibung und damit zu unbrauchbaren Ergebnissen führen kann. Benötigt wird also ein mathematisch fundierter Algorithmus zur Zustandsschätzung im Fall simultan auftretender mengenbasierter *und* stochastischer Unsicherheiten.

Ein erstes Verfahren zur optimalen Zustandsschätzung unter mengenbasierten und stochastischen Unsicherheiten wurde in [4; 7] vorgestellt. Es handelt sich dabei um ein

numerisches Verfahren für die Schätzung von skalaren Zuständen, welches zwar exakt ist, aber durch seine hohe Komplexität für die praktische Anwendung nur von begrenztem Wert ist. Für den Fall skalarer Zustände wurde daher in [5; 6] eine effiziente Näherungslösung hergeleitet. Eine Verallgemeinerung auf vektorielle Zustände für den Fall, dass Zustandsvektor und Beobachtungsvektor die gleiche Dimension aufweisen, findet sich in [8].

In diesem Beitrag wird die Schätzung von vektoriellen Zuständen mit *beliebiger Dimension* auf der Basis von *skalaren Messungen* behandelt. Dazu wird ein effizienter neuer Filteralgorithmus beschrieben, welcher die beiden klassischen Schätzverfahren – Kalman-Filter und mengenbasiertes Filter – verallgemeinert. Als Ergebnis der Schätzung werden ellipsoidale Lösungsmengen möglicher Zustände angegeben, deren Lage im stochastischen Sinne unsicher ist. Außerdem sind die beiden klassischen Filter darin als Grenzfälle enthalten, d.h. bei Wegfall einer der beiden Unsicherheitstypen konvergieren die Filtergleichungen entweder gegen das mengenbasierte Filter oder gegen das Kalman-Filter.

In Abschnitt 2 wird zunächst die Problemstellung detailliert beschrieben. Für rein stochastische oder rein mengenbasierte Unsicherheitsmodelle werden die Grundlagen bekannter Standard-Verfahren in den Abschnitten 3 (Kalman-Filter) und 4 (mengenbasiertes Filter) wiederholt. Der neue Filteralgorithmus wird in Abschnitt 5 beschrieben. In allen Fällen wird sowohl der Prädiktionsschritt als auch der Filterschritt betrachtet.

Zur Verdeutlichung der Wirkungsweise werden in Abschnitt 6 zwei typische Anwendungsfälle des neuartigen Filters vorgestellt. Die erste Anwendung diskutiert die Schätzung des Zustandes eines *nichtlinearen* Systems aus verrauschten Messungen. Dazu wird üblicherweise ein Erweitertes Kalman-Filter (EKF) verwendet, welches aus einer Linearisierung des originalen Systems mit nachfolgender Kalman-Filterung besteht. Der entstehende Linearisierungsfehler, welcher in der Regel eine komplizierte Verteilungsdichte aufweist, wird dabei vernachlässigt. Durch Anwendung des neuen Filters anstelle des EKF können entstehende Linearisierungsfehler als weitere Unsicherheit berücksichtigt werden. Außerdem können problemlos auch nichtdifferenzierbare Nichtlinearitäten wie Sprungnichtlinearitäten behandelt werden.

Die zweite Anwendung behandelt die Lokalisierung eines mobilen Roboters basierend auf verrauschten Messungen zu Landmarken, deren Lage nur innerhalb gewisser Toleranzen bekannt ist.

2 Formulierung des Problems

Betrachtet werde ein lineares zeitvariantes System der Form

$$\underline{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} \underline{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \underline{u}_{k-1}$$

mit der Messgleichung

$$y_k = \underline{H}_k^T \underline{x}_k.$$

$\underline{x}_k$ stellt den Zustandsvektor, $\underline{u}_k$ den Systemeingang und y_k die skalare Messung zum Zeitschritt k dar. Ist dieses System vollständig beobachtbar, kann der Zustand $\underline{x}_k$ auf der Basis von ausreichend vielen Messungen zum Beispiel durch einen Beobachter exakt rekonstruiert werden.

Im Allgemeinen sind nun aber sowohl die Systemeingänge als auch die Messungen unsicher, wobei hier additive Unsicherheitsquellen angenommen werden, d.h.

$$\begin{aligned} \underline{x}_k &= \mathbf{A}_{k-1} \underline{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} (\underline{u}_{k-1} + \underline{w}_{k-1}), \\ y_k &= \underline{H}_k^T \underline{x}_k + v_k. \end{aligned} \quad (1)$$

$\underline{w}_k$ bezeichnet dabei die Eingangsunsicherheit, v_k bezeichnet die Unsicherheit in der Messung.

Im Gegensatz zum obigen unsicherheitsfreien Fall besteht nun die Aufgabe darin, eine möglichst gute *Schätzung* des gesuchten Zustandes zu bestimmen. Die Schätzung besteht dabei aus einem Schätzwert und einer Quantifizierung der zugehörigen Unsicherheit.

3 Kalman-Filter

Betrachten wir zunächst ein rein stochastisches Unsicherheitsmodell gemäß

$$\begin{aligned} \underline{w}_k &= \underline{c}_k^u, \\ v_k &= c_k^y, \end{aligned}$$

wobei wir hier voraussetzen, dass $\underline{c}_k^u$, c_k^y mittelwertfreie, weiße und voneinander unabhängige Zufallsvariable mit Gaußscher Verteilungsdichte gemäß

$$\underline{c}_k^u \sim \underline{N}(\underline{0}, \mathbf{C}_k^u), \quad c_k^y \sim N(0, C_k^y) \quad (2)$$

sind; die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_k^u$ und die Varianz C_k^y werden als bekannt vorausgesetzt. Für dieses Systemmodell stellt das Kalman-Filter den optimalen Zustandsschätzer dar.

Selbstverständlich ist die Herleitung von entsprechenden Filtern auch für den Fall möglich, dass eine bekannte Korrelation zwischen $\underline{c}_k^u$ und c_k^y vorliegt. Außerdem ist es noch möglich, auf die Annahme normalverteilter Zufallsvariable zu verzichten und beliebige Verteilungen zu behandeln, von denen Momente bis zur zweiten Ordnung bekannt sind. In diesem Fall ist das Kalman-Filter immerhin noch der beste Zustandsschätzer aus der Familie aller linearen Schätzer.

Im Folgenden werden die Ergebnisse des Prädiktionsschritts mit dem Index p und die Ergebnisse des Filterschritts mit dem Index f bezeichnet.

3.1 Prädiktionsschritt

Wenn eine Zustandsschätzung $\underline{x}_{k-1}^f$ zum Zeitschritt $k-1$ vorliegt, kann das Systemmodell gemäß (1) dazu verwendet werden, um den sogenannten Prädiktionsschritt durch-

zuföhren, d.h. die aktuelle Zustandsschätzung mitsamt Unsicherheit zum nächsten Zeitschritt fortzuschreiben. Die so fortgeschriebene Zustandsschätzung $\underline{x}_k^p$ zum Zeitschritt k ist durch

$$\underline{x}_k^p = \mathbf{A}_{k-1} \underline{x}_{k-1}^f + \mathbf{B}_{k-1} \underline{u}_{k-1}$$

gegeben [1; 2]. Die Rekursionsformel für die entsprechende Kovarianzmatrix lautet

$$\mathbf{C}_k^p = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^f \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^u \mathbf{B}_{k-1}^T. \quad (3)$$

Im ersten Prädiktionsschritt wird die initiale Zustandsschätzung verwendet, welche durch $\underline{x}_0^f$, $\mathbf{C}_0^f$ gegeben sei.

3.2 Filterschritt

Bei vorliegendem Messwert zum Zeitschritt k kann nun basierend auf dem prädizierten Zustand $\underline{x}_k^p$ der Filterschritt durchgeführt werden. Die mit Hilfe der Messung verbesserte Zustandsschätzung ergibt sich bekanntlich [1; 2] zu

$$\underline{x}_k^f = \underline{x}_k^p + \frac{\mathbf{C}_k^p \underline{H}_k}{\mathbf{C}_k^y + \underline{H}_k^T \mathbf{C}_k^p \underline{H}_k} (y_k - \underline{H}_k^T \underline{x}_k^p), \quad (4)$$

mit der korrespondierenden Rekursionsformel

$$\mathbf{C}_k^f = \mathbf{C}_k^p - \frac{\mathbf{C}_k^p \underline{H}_k \underline{H}_k^T \mathbf{C}_k^p}{\mathbf{C}_k^y + \underline{H}_k^T \mathbf{C}_k^p \underline{H}_k}. \quad (5)$$

für die Kovarianzmatrix.

4 Mengenbasiertes Filter

In diesem Abschnitt werden rein mengenbasierte Unsicherheiten der Form

$$\begin{aligned} w_k &= \underline{e}_k^u, \\ v_k &= e_k^y \end{aligned}$$

angenommen, wobei keine weitere Annahme über die Unsicherheiten $\underline{e}_k^u$, e_k^y gemacht wird als deren Begrenztheit durch

$$(\underline{e}_k^u)^T (\mathbf{E}_k^u)^{-1} \underline{e}_k^u \leq 1, \quad (e_k^y)^2 \leq E_k^y. \quad (6)$$

Das bedeutet, dass weder individuelle noch gemeinsame Verteilungsdichtefunktionen von $\underline{e}_k^u$, e_k^y bekannt sind.

4.1 Prädiktionsschritt

Wenn eine Zustandsschätzung $\underline{x}_{k-1}^f$ zum Zeitschritt $k-1$ gegeben ist, kann wieder das Systemmodell gemäß (1) für den Prädiktionsschritt verwendet werden. Die Menge aller prädizierten Zustandsschätzungen zum Zeitschritt k ergibt sich als Minkowski-Summe [13] zweier Mengen, d.h. konzeptionell muss zu jedem Wert in der Menge der geschätzten Zustände jeder Wert in der Menge der Eingangsunsicherheiten addiert werden. Die entstehende Zustandsmenge ist im Fall von ellipsoidalen Mengen für die gegebene Zustandsschätzung $\underline{x}_{k-1}^f$ und die Eingangsunsicherheit $\underline{e}_k^u$ nicht wieder ein Ellipsoid. Es kann jedoch eine Familie

von Ellipsoiden gefunden werden, die von einem skalaren Parameter abhängen und jeweils eine äußere Hülle für die exakte Minkowski-Summe darstellen. Der Mittelpunkt dieser Menge ergibt sich zu

$$\underline{x}_k^p = \mathbf{A}_{k-1} \underline{x}_{k-1}^f + \mathbf{B}_{k-1} \underline{u}_{k-1}.$$

Die Rekursionsformel für die mengenbasierte Unsicherheit lautet [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k^p &= \frac{1}{0.5 - \kappa_k} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{E}_{k-1}^f \mathbf{A}_{k-1}^T \\ &+ \frac{1}{0.5 + \kappa_k} \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{E}_{k-1}^u \mathbf{B}_{k-1}^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Der skalare Parameter $\kappa_k \in (-0.5, 0.5)$ kann nun so gewählt werden, dass ein geeignetes Maß für die Größe des Hüll-ellipsoids, wie zum Beispiel das Volumen, minimiert wird [3]. Die Rekursion wird mit der Menge initialer Zustandsschätzungen gegeben durch $\underline{x}_0^f$, $\mathbf{E}_0^f$ gestartet.

4.2 Filterschritt

Bei vorliegendem Messwert zum Zeitschritt k kann nun basierend auf dem prädizierten Zustand $\underline{x}_k^p$ der Filterschritt durchgeführt werden. Die mit Hilfe der Messung eingegrenzte Menge möglicher Zustände ergibt sich zu [3]

$$\underline{x}_k^f = \underline{x}_k^p + \lambda_k \frac{\mathbf{E}_k^p \underline{H}_k}{E_k^y + \lambda_k \underline{H}_k^T \mathbf{E}_k^p \underline{H}_k} (y_k - \underline{H}_k^T \underline{x}_k^p)$$

und

$$\mathbf{E}_k^f = d_k \mathbf{P}_k^f$$

mit

$$\mathbf{P}_k^f = \mathbf{E}_k^p - \lambda_k \frac{\mathbf{E}_k^p \underline{H}_k \underline{H}_k^T \mathbf{E}_k^p}{E_k^y + \lambda_k \underline{H}_k^T \mathbf{E}_k^p \underline{H}_k}$$

und

$$d_k = 1 + \lambda_k - \lambda_k \frac{(y_k - \underline{H}_k^T \underline{x}_k^p)^2}{E_k^y + \lambda_k \underline{H}_k^T \mathbf{E}_k^p \underline{H}_k}.$$

Der Parameter $\lambda_k \in [0, \infty)$ wird wieder so gewählt, dass die Größe von $\mathbf{E}_k^f$ minimiert wird [3].

5 Verallgemeinertes Filter

Nach Vorstellung der klassischen Unsicherheitsmodelle und der entsprechenden Schätzmethoden wollen wir uns nun dem verallgemeinerten Unsicherheitsmodell zuwenden. Dazu betrachten wir die additive Kombination von mengenbasierten und stochastischen Unsicherheiten gemäß

$$\begin{aligned} w_k &= \underline{e}_k^u + \underline{c}_k^u, \\ v_k &= e_k^y + c_k^y, \end{aligned}$$

wobei $\underline{e}_k^u$, e_k^y wieder wie in (6) wertbegrenzt sind. Entsprechend der Diskussion des rein stochastischen Unsicherheitsmodells werden $\underline{c}_k^u$, c_k^y wie in (2) als mittelwertfreie, weiße und voneinander unabhängige Zufallsvariable mit

Gaußscher Verteilungsdichte angenommen, wobei die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_k^u$ und die Varianz C_k^y bekannt sind.

5.1 Prädiktionsschritt

Der Prädiktionsschritt beim verallgemeinerten Unsicherheitsmodell kann durch Superposition der Ergebnisse der Prädiktion für die klassischen Unsicherheitsmodelle durchgeführt werden. Der Schätzwert ergibt sich wiederum zu

$$\underline{x}_k^p = \mathbf{A}_{k-1} \underline{x}_{k-1}^f + \mathbf{B}_{k-1} \underline{u}_{k-1}.$$

Die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_k^p$ des prädizierten Zustands $\underline{x}_k^p$ erhält man aus (3), die mengenbasierte Unsicherheit $\mathbf{E}_k^p$ gemäß (6). Entsprechend dem rein mengenbasierten Fall wird auch hier $\kappa_k \in (-0.5, 0.5)$ so gewählt, dass die Größe von $\mathbf{E}_k^p$ minimiert wird. Der Prädiktionsschritt wird mit der Schätzung $\underline{x}_0^f$, $\mathbf{C}_0^f$, $\mathbf{E}_0^f$ initialisiert.

5.2 Filterschritt

Die Verallgemeinerung des Filterschritts ist leider *nicht* durch die einfache Kombination der Ergebnisse von mengenbasiertem und Kalman-Filter zu bewerkstelligen. Der Grund hierfür ist, dass im verallgemeinerten Fall der Schnitt zweier Mengen mit stochastischer Lage zu bestimmen ist, wobei das Ergebnis eine komplizierte Menge mit stochastischer Größe, Orientierung und Lage ist. Um ein in der praktischen Anwendung nützliches Ergebnis zu bekommen, wird daher das exakte Resultat durch ein Ellipsoid mit einem normalverteilten Mittelpunkt approximiert. Der Schätzwert ist dann durch

$$\underline{x}_k^f = \mathbf{W}_k^p \underline{x}_k^p + \underline{W}_k^y y - (\mathbf{W}_k^p \mathbf{C}_k^p \underline{H} - \underline{W}_k^y C_k^y) F_1(y_k - \underline{H}_k^T \underline{x}_k^p) \quad (8)$$

gegeben [9]. Die mengenbasierte Unsicherheit, welche die Größe und Orientierung des Ellipsoids bestimmt, ergibt sich zu

$$\mathbf{E}_k^f = (1 + \lambda_k) \mathbf{E}_k^p - (1 + \lambda_k) \lambda_k \frac{\mathbf{E}_k^p \underline{H}_k \underline{H}_k^T \mathbf{E}_k^p}{\underline{E}_k^y + \lambda_k \underline{H}_k^T \mathbf{E}_k^p \underline{H}_k}. \quad (9)$$

Die korrespondierende Kovarianzmatrix, welche die Unsicherheit in der Lage des Ellipsoidmittelpunkts definiert, ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^f &= \mathbf{W}_k^p \mathbf{C}_k^p (\mathbf{W}_k^p)^T + \underline{W}_k^y (\underline{W}_k^y)^T C_k^y \\ &- (\mathbf{W}_k^p \mathbf{C}_k^p \underline{H}_k - \underline{W}_k^y C_k^y) \\ &(\mathbf{W}_k^p \mathbf{C}_k^p \underline{H}_k - \underline{W}_k^y C_k^y)^T F_2(y_k - \underline{H}_k^T \underline{x}_k^p) \end{aligned} \quad (10)$$

gegeben [9], wobei die Größen $\mathbf{W}_k^p$, $\underline{W}_k^y$, $F_1(y_k - \underline{H}_k^T \underline{x}_k^p)$ und $F_2(y_k - \underline{H}_k^T \underline{x}_k^p)$ im Anhang zu finden sind. Der Parameter $\lambda_k \in [0, \infty)$ wird wieder so bestimmt, dass ein Maß für die Größe der Gesamtunsicherheit, d.h. eine geeignete Funktion von $\mathbf{E}_k^f$ und $\mathbf{C}_k^f$, minimiert wird.

6 Anwendungsbeispiele

Im Folgenden werden nun zwei typische Anwendungsfälle des neuartigen Filters diskutiert.

6.1 Ersatz des Erweiterten Kalman-Filters für spezielle nichtlineare Systeme

Hier soll der Zustand eines nichtlinearen Systems aus veräuschten Messungen geschätzt werden. Um die Ergebnisse leichter interpretierbar zu gestalten, wird ein Prozess mit nicht vorhandener Dynamik, d.h. ein stationärer Zustand $\underline{x} = [x_1, x_2]^T$, angenommen. Damit ist der Prädiktionsschritt hier ohne Bedeutung.

Es seien zwei *nichtlineare* Messgleichungen

$$y_k^a = x_1 + 2 \sin(x_1) + c_k^a, \quad (11)$$

$$y_k^b = 2x_1 + x_2 + 3 \cos(x_2) + c_k^b \quad (12)$$

gegeben, wobei c_k^a und c_k^b Realisierungen von zwei voneinander unabhängigen weißen mittelwertfreien Gaußschen Zufallsprozessen mit Standardabweichung $\sigma_k^a = 3$ und $\sigma_k^b = 3$ sind. Der initiale Schätzwert ist durch $\underline{x}_0^f = [20, 20]^T$ gegeben. Die korrespondierende Kovarianzmatrix lautet

$$\mathbf{C}_0^f = \begin{bmatrix} 100^2 & 0 \\ 0 & 100^2 \end{bmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Zustands derartiger Systeme wird, wie schon eingangs erwähnt, üblicherweise ein Erweitertes Kalman-Filter (EKF) verwendet. Dazu werden die vorliegenden nichtlinearen Gleichungen zunächst um einen geeigneten Zustand linearisiert, wobei in der Regel der aktuelle Schätzwert verwendet wird. Der durch die Linearisierung entstehende Fehler wird dabei vernachlässigt. Auf die entstehenden linearen Gleichungen wird dann das in Abschnitt 3 beschriebene Kalman-Filter angewendet.

Auf das hier betrachtete Problem wird zu Referenzzwecken zunächst ein solches EKF angewendet. Die Ergebnisse sind in Bild 1a dargestellt. Gezeigt wird die zeitliche Veränderung der Konfidenzmenge, welche um den Schätzwert $\underline{x}_k^f$ zentriert ist und deren Größe sich aus der mit 9 multiplizierten Kovarianzmatrix ergibt. Für $k \rightarrow \infty$ enthält die Konfidenzmenge *nicht* den wahren Zustand $\underline{x} = [17, 13]^T$, welcher durch einen Punkt markiert ist.

Allerdings macht im vorliegenden Fall eine lokale Linearisierung wenig Sinn, da das Ergebnis zu sensitiv gegenüber dem gewählten Linearisierungspunkt ist¹. Es wird daher eine globale Linearisierung der Form

$$y_k^a \approx \underline{H}_a^T \underline{x} + c_k^a,$$

$$y_k^b \approx \underline{H}_b^T \underline{x} + c_k^b$$

mit $\underline{H}_a = [1, 0]^T$, $\underline{H}_b = [2, 1]^T$ vorgenommen. Der entstehende Linearisierungsfehler, welcher eine komplizierte Verteilungsdichte aufweist, wird hier vernachlässigt. Auf

¹ Auch ein sogenanntes Iteratives Erweitertes Kalman-Filter (IEKF) [11] würde hier keine Verbesserung bringen.

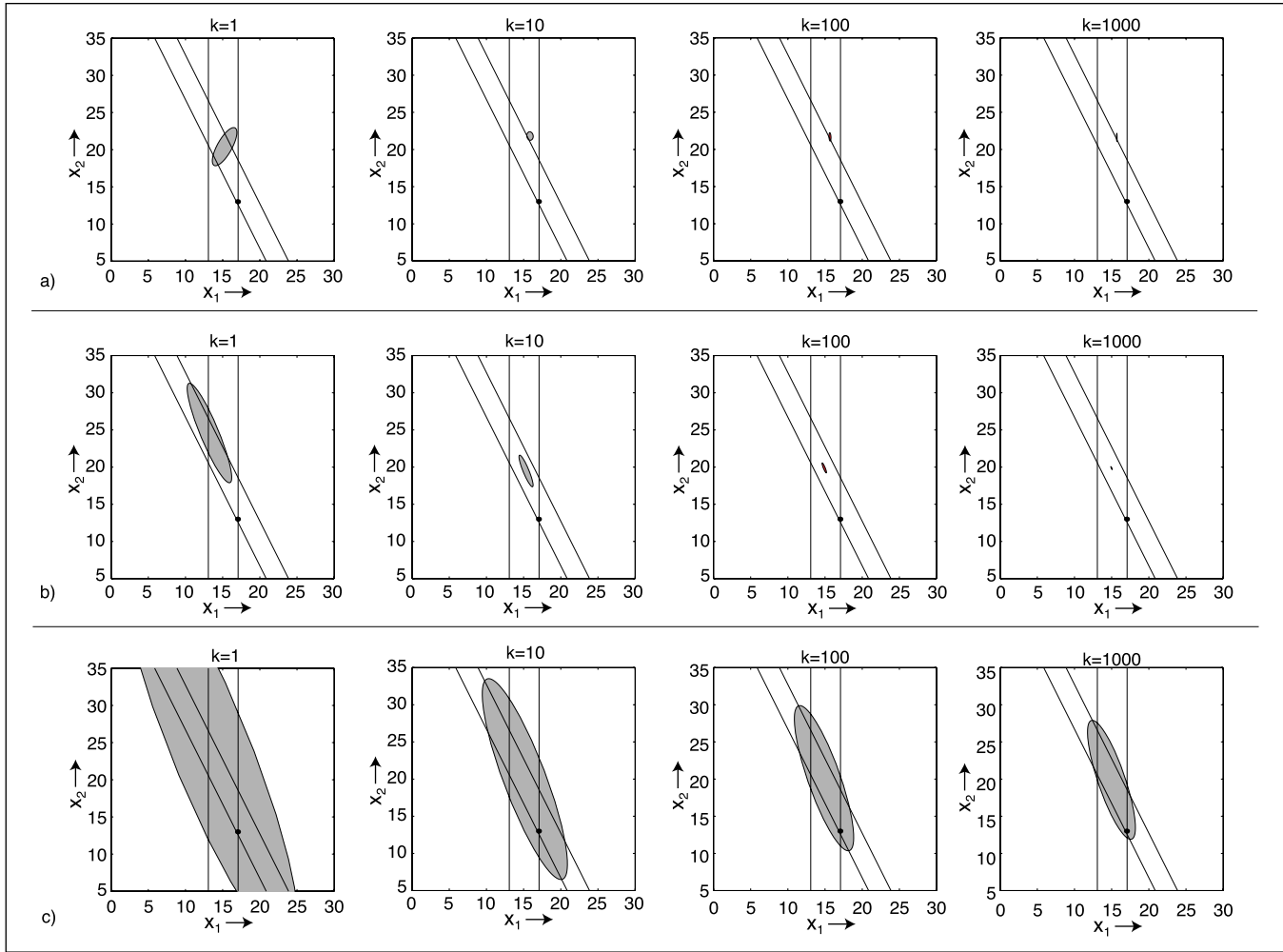


Bild 1: Ergebnis der nichtlinearen Zustandsschätzung mit a) Erweitertem Kalman-Filter, b) globaler Linearisierung und nachfolgender Anwendung des Kalman-Filters und c) verallgemeinertem Filter. Der wahre Zustand ist $\tilde{x} = [17, 13]^T$.

die entstehenden linearen Gleichungen wird das Kalman-Filter angewendet. Die zeitliche Veränderung der wie oben definierten Konfidenzmenge ist in Bild 1b dargestellt. Auch hier enthält die Konfidenzmenge für $k \rightarrow \infty$ *nicht* den wahren Zustand.

Zur Anwendung des neuen Filters werden nun die originalen nichtlinearen Messgleichungen ebenfalls durch eine globale Linearisierung in eine lineare Form

$$y_k^a = \underline{H}_a^T \underline{x} + e_k^a + c_k^a, \quad (13)$$

$$y_k^b = \underline{H}_b^T \underline{x} + e_k^b + c_k^b \quad (14)$$

gebracht, wobei wieder $\underline{H}_a = [1, 0]^T$, $\underline{H}_b = [2, 1]^T$ gilt. Im Gegensatz zum oben beschriebenen Vorgehen werden die Linearisierungsfehler nun aber nicht vernachlässigt, sondern durch Einführen zusätzlicher Fehlerterme e_k^a, e_k^b konservativ abgeschätzt. Die Grenzen von e_k^a, e_k^b sind dabei durch

$$E_a = \left(\max_{\underline{x} \in \mathbb{R}^2} |2 \sin(x_1)| \right)^2 = 2^2,$$

$$E_b = \left(\max_{\underline{x} \in \mathbb{R}^2} |3 \cos(x_2)| \right)^2 = 3^2$$

gegeben.

Vor Anwendung des neuen Filters müssen die kompletten Anfangsbedingungen festgelegt werden. Der initiale Schätzwert und die korrespondierende Kovarianzmatrix sind gegeben. Die initiale mengenbasierte Unsicherheit ist gleich Null, wird aber zu

$$\mathbf{E}_0^f = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$$

mit einem kleinen Wert $\epsilon > 0$ gesetzt, um positive Definitheit zu gewährleisten.

Entsprechend dem Vorgehen bei der Anwendung des Kalman-Filters wird das neue Filter nun mittels der Formeln für $\underline{x}_k^f$ in (8), $\mathbf{E}_k^f$ in (9) und $\mathbf{C}_k^f$ in (10) in jedem Zeitschritt k zunächst auf Messgleichung (13) und dann auf (14) rekursiv angewendet. Der Parameter λ_k wird dabei so bestimmt, dass das Maß $\det(\mathbf{E}_k^f) + 9\det(\mathbf{C}_k^f)$ für die Gesamtunsicherheit minimiert wird.

Der zeitliche Verlauf der Konfidenzmenge ist in Bild 1c gezeigt. Die Konfidenzmenge ist wieder um den Schätzwert $\underline{x}_k^f$ zentriert, ihre Größe ist durch die Minkowski-Summe [13] der durch $\mathbf{E}_k^f$ und $9 \mathbf{C}_k^f$ definierten Mengen gegeben.

Für den hypothetischen Fall verschwindender stochastischer Unsicherheiten in den linearisierten Messgleichun-

gen aus (13), (14) würde sich die beste Zustandsschätzung als Schnittmenge der beiden dargestellten Streifen ergeben. Diese beiden Streifen repräsentieren die Grenzen für den Linearisierungsfehler. Die Konfidenzmenge stellt eine äußere Hülle für die hypothetische Schnittmenge dar und ergibt für $k \rightarrow \infty$ eine enge ellipsoide Approximation. Damit ist der wahre Zustand immer in der Konfidenzmenge enthalten.

6.2 Lokalisierung eines mobilen Roboters auf der Basis unsicherer Landmarken

Betrachtet wird ein mit Abstandssensoren ausgerüsteter mobiler Roboter gemäß Bild 2, welcher die Abstände zu drei Wänden i , $i = 1, 2, 3$, misst. Die Lage der Wände sei nur innerhalb gewisser Toleranzen bekannt, d.h.

$$d_i = \tilde{d}_i + \Delta d_i \text{ mit } |\Delta d_i| \leq b_i,$$

wobei $\tilde{d}_i$ den tatsächlichen (vorzeichenbehafteten) Abstand der Wand i vom Ursprung bezeichnet. Δd_i ist die unbekannte, aber begrenzte Abweichung des tatsächlichen Abstandes vom Nominalwert d_i .

In jedem Zeitschritt werden sequentiell die Abstände zu den Wänden gemessen, wobei bis zum Zeitschritt $k = 1000$ nur die ersten beiden Wänden berücksichtigt werden. Danach werden die Abstände zu allen Wänden gemessen. Die Abstandsmessungen sind dabei durch weißes normalverteiltes mittelwertfreies Rauschen mit Varianz σ_i^2 gestört. Damit ergibt sich die Messgleichung

$$y = d_i + D_i^k = \underline{H}_i^T \tilde{\underline{x}} + \Delta d_i + c_i^k,$$

wobei D_i^k den gemessenen Abstand und $\tilde{\underline{x}} = [\tilde{x}, \tilde{y}]^T = [2000, 2000]^T$ die tatsächliche Roboterposition bezeichnet. Die Einheitsnormalenvektoren $\underline{H}_i$ der Wände seien exakt bekannt. Die verbleibenden Parameter sind in der Tabelle 1 aufgeführt.

Die initiale Lageschätzung sei durch $\underline{x}_0^f = [1900, 2100]^T$ mit

$$\mathbf{E}_0^f = \begin{bmatrix} 2000^2 & 0 \\ 0 & 2000^2 \end{bmatrix}$$

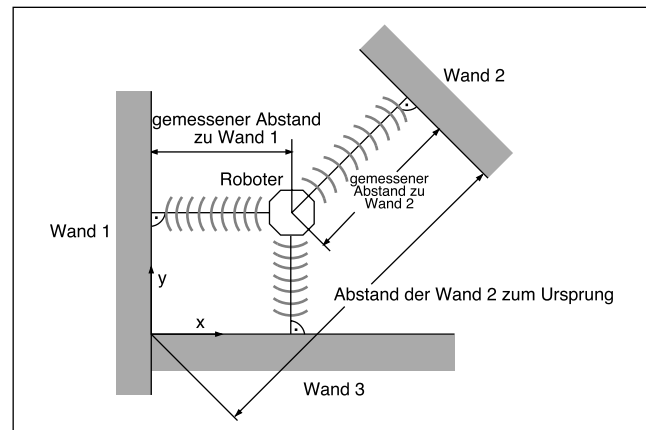


Bild 2: Lokalisierung eines mobilen Roboters.

Tabelle 1: Parameter des Lokalisierungsexperiments.

Wand i	1	2	3
Normalenvektor $\underline{H}_i$	$[1, 0]^T$	$-[1, 1]^T / \sqrt{2}$	$[0, 1]^T$
Nominaler Abstand d_i	0	-6000	0
Tatsächlicher Abstand $\tilde{d}_i$	-25	-6030	-20
Schranke b_i	30	50	30
Standardabweichung σ_i	100	10	300

und

$$\mathbf{C}_0^f = \begin{bmatrix} 2000^2 & 0 \\ 0 & 2000^2 \end{bmatrix}$$

gegeben.

Ergebnisse des Kalman-Filters: Um das reine Kalman-Filter auf dieses Problem anzuwenden, werden die Wandunsicherheiten als zusätzliches weißes Rauschen angenommen. Damit ergibt sich die gesamte stochastische Messunsicherheit zu $\mathbf{C}_k^y + \mathbf{E}_k^y = \sigma_i^2 + b_i^2$. Basierend auf dieser Unsicherheit wird dann die Lageschätzung mit Hilfe der Gleichungen (4), (5) rekursiv verbessert. Der zeitliche Verlauf der entstehenden Konfidenzmenge ist in Bild 3a dargestellt, wobei sich die Konfidenzmenge wie im vorherigen Beispiel ergibt. Die Konfidenzmenge für $k \rightarrow \infty$ enthält *nicht* die durch einen Punkt gekennzeichnete tatsächliche Position.

Ergebnisse des mengenbasierten Filters: Zur Anwendung des rein mengenbasierten Filters wird nun das unbegrenzte Rauschen in der Abstandsmessung als zusätzliche begrenzte Unsicherheit berücksichtigt. Damit ergibt sich die gesamte mengenbasierte Messunsicherheit zu $\mathbf{E}_y^k + \gamma \mathbf{C}_y^k = b_i^2 + \gamma \sigma_i^2$, wobei γ hinreichend groß gewählt werden muss. Je kleiner γ gewählt wird, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit einer inkonsistenten Schätzung.

Das Ergebnis für $\gamma = 4$ ist in Bild 3b dargestellt. Hier enthält die Konfidenzmenge für $k \rightarrow \infty$ *nicht* die tatsächliche Position. Der Fall $\gamma = 16$, Bild 3c, ergibt in dieser Simulation eine konsistente, aber konservative Schätzung.

Ergebnisse des verallgemeinerten Filters: Um die Schätzung der Roboterposition mit Hilfe einer verrauschten Abstandsmessung zur Wand i zu verbessern, werden die Gleichungen für $\underline{x}_k^f$ in (8), $\mathbf{E}_k^f$ in (9) und $\mathbf{C}_k^f$ in (10) mit $\mathbf{E}_k^y = b_i^2$ und $\mathbf{C}_k^y = \sigma_i^2$ verwendet. Der Parameter λ_k wird dabei numerisch so bestimmt, dass $\det(\mathbf{E}_k^f) + \det(\mathbf{C}_k^f)$ minimiert wird. Bild 3d zeigt den Verlauf der Schätzung über der Zeit. Die Konfidenzmenge ist wieder um den Schätzwert $\underline{x}_k^f$ zentriert, ihre Größe ist durch die Minkowski-Summe der durch $\mathbf{E}_s^k$ und $9 \mathbf{C}_s^k$ definierten Mengen gegeben. Die Konfidenzmenge stellt auch hier wieder eine äußere Hülle für die hypothetische Schnittmenge der drei dargestellten Streifen dar, welche die Toleranzen in der Lage der Wände repräsentieren. Für $k \rightarrow \infty$ ergibt sich eine ellipsoide Approximation, die die wahre Position enthält.

Das Bild 4 zeigt die Verläufe des Schätzfehlers $\|\underline{x}_k^f - \tilde{\underline{x}}\|$ für die oben diskutierten Filtertypen. Beim Kalman-Filter sind schon nach wenigen Messungen nur noch geringe Änderungen im Schätzfehler festzustellen. Beim mengenba-

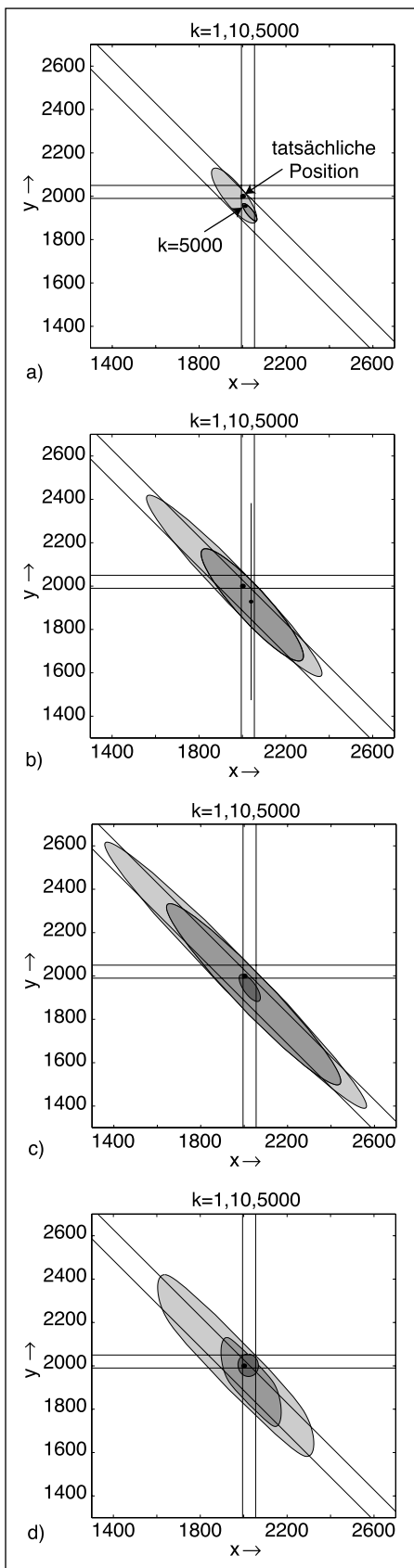


Bild 3: Ergebnis der Lokalisierung des mobilen Roboters mit a) dem Kalman-Filter, b) dem mengenbasierten Filter ($\gamma = 4$), c) dem mengenbasierten Filter ($\gamma = 16$) und d) dem verallgemeinerten Filter. Die tatsächliche Roboterposition ist $\tilde{x} = [\tilde{x}, \tilde{y}]^T = [2000, 2000]^T$.

sierten Filter sowohl für $\gamma = 4$ als auch für $\gamma = 16$ zeigt sich, dass nicht jede Messung zu einer Veränderung des aktuellen Schätzwertes beiträgt. Außerdem ist der Verlauf für $\gamma = 16$ erwartungsgemäß sehr unruhig. Es ist auffallend, dass nur das neue Filter die Information der ab Zeitschritt

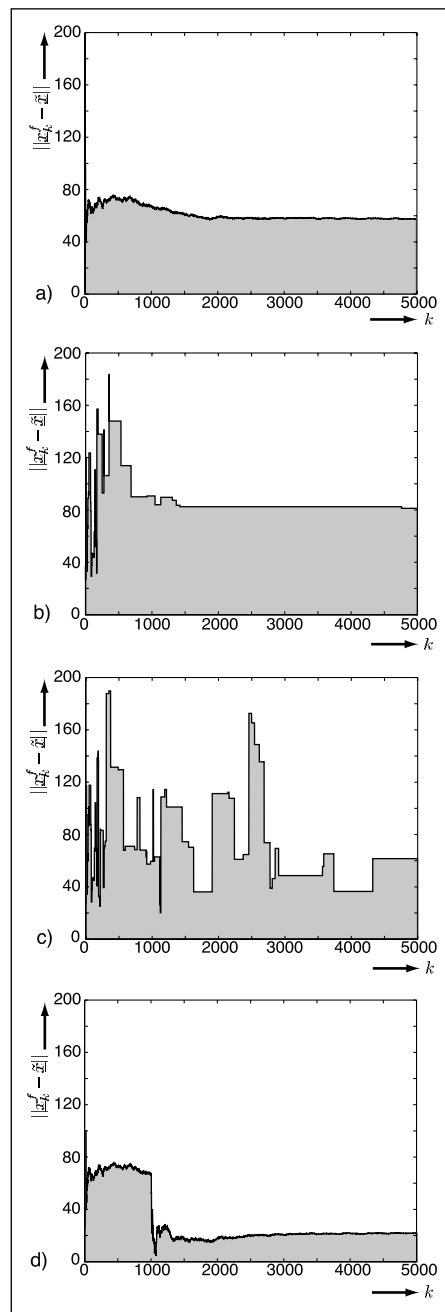


Bild 4: Fehlerverlauf bei der Lokalisierung des mobilen Roboters über die Zeit: a) Kalman-Filter, b) mengenbasiertes Filter, $\gamma = 4$, c) $\gamma = 16$ und d) verallgemeinertes Filter.

$k = 1001$ zusätzlich vermessenen Wand 3 sinnvoll zur Reduktion des Schätzfehlers nutzt und dabei den geringsten Schätzfehler erreicht.

7 Bewertung

Probleme der Zustandsschätzung werden meist ohne zu hinterfragen auf der Basis einfacher stochastischer Fehlermodelle behandelt. In vielen Fällen ist jedoch eine mengenbasierte Fehlermodellierung angemessener und führt daher zu besseren Ergebnissen.

Darüber hinaus ist es oft erforderlich, simultan auftretende stochastische und mengenbasierte Unsicherheiten zu berücksichtigen, was aber mit den klassischen Schätzverfahren wie dem Kalman-Filter oder dem mengenbasierten Fil-

ter nicht möglich ist. Deshalb werden häufig heuristische Verfahren eingesetzt. Zur mathematisch korrekten Behandlung der Zustandsschätzung im Fall simultan auftretender mengenbasierter und stochastischer Unsicherheiten wurde daher ein neuartiger Filteralgorithmus entwickelt.

Mit diesem Filteralgorithmus erhält der Anwender eine genauere quantitative Angabe der Unsicherheit in der Schätzung und damit einen genaueren Schätzwert für die gesuchte Größe. Der dazu benötigte Rechenaufwand ist von der gleichen Größenordnung wie bei den bekannten Filteralgorithmen. Ein weiterer wesentlicher Vorteil ist die Transparenz des neuartigen Filters, wodurch umständliche Anpassungen an das konkrete Problem entfallen.

Anhang

Die Gewichtungsfaktoren $\mathbf{W}_k^p$, $\mathbf{W}_k^y$ sind durch

$$\mathbf{W}_k^p = \mathbf{I} - \lambda_k \frac{\mathbf{E}_k^p \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^T}{\mathbf{E}_k^y + \lambda_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{E}_k^p \mathbf{H}_k},$$

$$\mathbf{W}_k^y = \lambda_k \frac{\mathbf{E}_k^p \mathbf{H}_k}{\mathbf{E}_k^y + \lambda_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{E}_k^p \mathbf{H}_k}$$

gegeben. Die nichtlinearen Funktionen F_1 und F_2 der sogenannten Innovationen $I_k = y_k - \mathbf{H}_k^T \mathbf{x}_k^p$ sind definiert als $F_1(I_k) = G_0(I_k, B, \sigma)$ und $F_2(I_k) = (G_0(I_k, B, \sigma))^2 + G_1(I_k, B, \sigma)/\sigma^2$ mit

$$G_0(x, B, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-B)^2}{\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x+B)^2}{\sigma^2}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{x-B}{\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x+B}{\sigma}\right)},$$

$$G_1(x, B, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{(x-B) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-B)^2}{\sigma^2}\right) - (x+B) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x+B)^2}{\sigma^2}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{x-B}{\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x+B}{\sigma}\right)}$$

und

$$B = \sqrt{\mathbf{E}_k^y} + \sqrt{\mathbf{H}_k^T \mathbf{E}_k^p \mathbf{H}_k}, \quad \sigma = \sqrt{\mathbf{H}_k^T \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k + \mathbf{C}_k^y}$$

sowie $\operatorname{erf}(x)$ gemäß [12].

Literatur

- [1] B. D. O. Anderson und J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, 1979.
- [2] K. Brammer und G. Siffing, „Kalman-Bucy-Filter“, 2. Auflage, Oldenbourg, 1985.
- [3] U. D. Hanebeck und G. Schmidt, „Set-theoretic Localization of Fast Mobile Robots Using an Angle Measurement Technique“, *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '96)*, Minneapolis, Minnesota, USA, April 1996, S. 1387–1394.

- [4] U. D. Hanebeck, J. Horn und G. Schmidt, „On Combining Set Theoretic and Bayesian Estimation“, *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '96)*, Minneapolis, Minnesota, USA, April 1996, S. 3081–3086.
- [5] U. D. Hanebeck und J. Horn, „A New State Estimator for a Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainty Model“, *Proceedings of SPIE Vol. 3720, AeroSense Symposium*, Orlando, Florida, USA, April 1999, S. 336–344.
- [6] U. D. Hanebeck und J. Horn, „A New Estimator for Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainty Models Applied to Mobile Robot Localization“, *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '99)*, Detroit, Michigan, USA, Mai 1999, S. 1335–1340.
- [7] U. D. Hanebeck, J. Horn und G. Schmidt, „On Combining Statistical and Set-Theoretic Estimation“, *Automatica*, Vol. 35, No. 6, 1999, S. 1101–1109.
- [8] U. D. Hanebeck und J. Horn, „New Estimators for Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainty Models: The Vector Case“, *Proceedings of the Fifth European Control Conference (ECC '99)*, Karlsruhe, August/September 1999.
- [9] U. D. Hanebeck und J. Horn, „New Estimators for Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainty Models: The Scalar Measurement Case“, *Proceedings of the 1999 IEEE Conference on Decision and Control (CDC '99)*, Phoenix, Arizona, USA, Dezember 1999, S. 1934–1939.
- [10] J. Horn und G. Schmidt, „Continuous Localization for Long-Range Indoor Navigation of Mobile Robots“, *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '95)*, Nagoya, Japan, Mai 1995, S. 387–394.
- [11] V. Krebs, „Nichtlineare Filterung“, Oldenbourg, 1980.
- [12] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [13] F. C. Schweppe, *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice-Hall, 1973.

Manuskripteingang: 8. Februar 2000.



Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck ist am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität München tätig. Hauptarbeitsfelder: Nicht-lineare Zustandsschätzer, Komponenten und Algorithmen für mobile Serviceroboter.

Adresse: Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München, D-80290 München, E-Mail: Uwe.Hanebeck@ei.tum.de



Dr.-Ing. Joachim Horn ist bei der Zentralabteilung Technik der Siemens AG in München tätig. Hauptarbeitsfelder: Anwendung nichtlinearer Regelungsverfahren in der Automobiltechnik, Diagnose mit Kausalen Netzen.

Adresse: Siemens AG, ZT IK 4, D-81730 München, E-Mail: Joachim.Horn@mchp.siemens.de