FORTSCHRITT-BERICHTE VDI

Dipl.-Ing. Uwe Hanebeck, München

Lokalisierung eines mobilen Roboters mittels effizienter Auswertung von Sensordaten und mengenbasierter Zustandsschätzung

Reihe **8**: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik Nr. **643**

inst 1.5
97 A M90

Hanebeck, Uwe

Lokalisierung eines mobilen Roboters mittels effizienter Auswertung von Sensordaten und mengenbasierter Zustandsschätzung

Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 643. Düsseldorf: VDI Verlag 1997.
134 Seiten, 46 Bilder, 1 Tabelle.

Für die Dokumentation: Mobiler Roboter – Lagebestimmung – Rekursive Lokalisierung – Winkelmeßsystem – Distanzsensor – Analytische Lösungen – Sensordatenfusion – Ellipsoid – Mengenbasierte Unsicherheitsmodellierung – Nichtlineare Filterung

Diese Arbeit beschreibt ein integriertes Verfahren zur Initialisierung und rekursiven Stützung der Schätzung der Lage eines mobilen Roboters mit Hilfe eines bordeigenen Multisensorsystems. Dabei werden für zwei Sensortypen, Winkelmeßsysteme sowie Distanzsensor-Arrays, geschlossene Lösungen zur Bestimmung der Roboterlage bezüglich bekannter Umweltmerkmale entwickelt. Zur Fusion der Daten verschiedener Sensoren wird ein neues mengenbasiertes Fusionsschema verwendet. Die Präzision, Robustheit und Langzeitstabilität des vorgeschlagenen Verfahrens wurde mit dem omnidirektionalen Serviceroboter ROMAN durch täglichen Dauereinsatz und in Langstreckenexperimenten mit mehr als einem Kilometer Fahrtstrecke bei Geschwindigkeiten von bis zu 1 m/s nachgewiesen.

Die Reihen der FORTSCHRITT-BERICHTE VDI:

1 Konstruktionstechnik/Maschinenelemente
2 Fertigungstechnik
3 Verfahrenstechnik
4 Bauingenieurwesen
5 Grund- und Werkstoffe
6 Energieerzeugung
7 Strömungstechnik
8 Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik
9 Elektronik
10 Informatik/Kommunikationstechnik
11 Schwingungstechnik
12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik
13 Fördertechnik/Logistik
14 Landtechnik/Lebensmitteltechnik
15 Umwelttechnik
16 Technik und Wirtschaft
17 Biotechnik/Medizintechnik
18 Mechanik/Bruchmechanik
19 Wärmetechnik/Kältetechnik
20 Rechnerunterstützte Verfahren (CAD, CAM, CAE, CAP, CAQ, CIM, ...)
21 Elektrotechnik

UNIVERSITÄTS. * KARLSRUHE * BIBLIOTHEK

© VDI Verlag GmbH · Düsseldorf 1997

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Fotokopie, Mikrokopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, im Internet und das der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 0178-9546

ISBN 3-18-364308-1

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik der Technischen Universität München.

An erster Stelle danke ich dem Lehrstuhlinhaber Prof. Dr.-Ing. G. Schmidt, der diese Arbeit anregte, ihre Durchführung überhaupt erst ermöglichte und durch zahlreiche Ratschläge und Diskussionen förderte.

Mein Dank gilt auch Prof. Dr. rer. nat. M. Lang für die Übernahme des Vorsitzes im Promotionsausschuß. Prof. Dr.-Ing. E. D. Dickmanns danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und die freundliche Übernahme des Korreferats.

Dem akademischen Direktor des Lehrstuhls, Dr.-Ing. F. Freyberger, dessen Sachverstand und gute Ratschläge vor allem beim Aufbau von ROMAN wesentlich zum Gelingen beigetragen haben, möchte ich für seine Hilfe danken.

Meinen Kollegen am Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, insbesondere den Mitgliedern des ROMAN–Teams W. Daxwanger, E. Ettelt und C. Fischer, meinem langjährigen Zimmerkollegen J. Horn, sowie D. Glüer und A. Gilg bin ich wegen ihrer Hilfe und den vielen fruchtbaren Diskussionen sehr verbunden.

Weiterhin danke ich allen Studenten, die an dieser Arbeit mitgewirkt haben, insbesondere meinen Diplomanden H. Berger, N. Bögholm, R. Richter, J. Stegmeier, R. Süss und S. Maier, für die großartige Unterstützung bei der praktischen Umsetzung der theoretischen Erkenntnisse. Ebenso möchte ich mich bei den Herren Gradl, Jaschik, Kubick, Ritt, und Stöber aus der mechanischen und elektronischen Werkstatt des Lehrstuhls bedanken.

Mein besonderer Dank gilt meiner Frau Linde und meiner Tochter Ariane für die Geduld bei der Abfassung dieser Arbeit.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir diesen Weg ermöglicht haben.

München, im März 1997 Uwe Hanebeck

Für Linde

Inhaltsverzeichnis

Notation **VIII**

1 Einleitung **1**

1.1 Problemstellung 1

1.2 Anforderungen und Ziele 1

1.3 Stand der Technik und Beitrag dieser Arbeit 3

1.4 Übersicht über die Arbeit 5

2 Mengenbasierte Zustandsschätzung **6**

Einleitung 6

2.1 Bekannte Ansätze 6

2.2 Ziel und verfolgte Methodik 8

2.3 Überblick über das Kapitel 8

2.4 Kombination von Zustandsschätzungen 9

2.4.1 Hüllellipsoid für die Schnittmenge zweier Ellipsoide 10

2.4.2 Effizienter Überlappungstest für zwei Ellipsoide 11

2.4.3 Minimalvolumiges Hüllellipsoid für die Schnittmenge 13

2.5 Zustandsschätzung für statische Systeme 15

2.5.1 Das Systemmodell 15

2.5.2 Menge aller Zustände definiert durch die Beobachtung 15

2.5.3 Mengenbasierter Hypothesentest 16

2.6 Zustandsschätzung für dynamische Systeme 16

2.6.1 Das Systemmodell 17

2.6.2 Mengenbasierte Prädiktion des Systemzustands 17

2.6.3 Mengenbasierte Fusion von Prädiktion und Messung 18

2.6.4 Spezialfall: Skalare Messung 22

2.7 Robuste Zustandsschätzung 25

2.7.1 Schwächen der vorgestellten Zustandsschätzer 25

2.7.2 Erhöhung der Robustheit durch Konsistenzmaße 25

Wesentliche Ergebnisse des Kapitels 28

3 Lokalisierung eines mobilen Roboters 29

Einleitung 29

3.1 Anschauliche Beschreibung des Lokalisierungsverfahrens 30

3.2 Umweltmodell 32

3.3 Bestimmung der initialen Roboterlage 34

3.3.1 Schnelle Exploration des Interpretationsbaums 36

3.3.2 Behandlung von Fehlmessungen 37

3.4 Fortschreibung der Roboterlage durch Koppelnavigation 38

3.4.1 Koppelnavigationsgleichungen 38

3.4.2 Perturbationsanalyse für die Koppelnavigation 39

3.4.3 Omnidirektionale Roboter mit konventionellen Rädern 40

3.5 Rekursive Lokalisierung mit Winkelmeßsystemen 41

3.5.1 Bestimmung potentiell sichtbarer Landmarken 42

3.5.2 Aufstellen von Winkelhypothesen 43

3.5.3 Menge der Roboterlagen definiert durch die Winkelmessung 44

3.5.4 Fusion der Winkelmessung mit prädizierter Roboterlage 44

3.5.5 Zusammenfassung 44

3.6 Rekursive Lokalisierung mit Distanzsensor–Arrays 45

3.6.1 Dynamische Rekonfigurierung 46

3.6.2 Bildung von Meßhypothesen zur Vermeidung von Störungen 48

3.6.3 Zeitmultiplex–Verfahren zur Erhöhung der Meßrate 49

3.6.4 Sensor–Arrays zur Vermessung von Umweltmerkmalen 51

3.6.5 Roboterlage aus gemessener Landmarkenlage 52

3.6.6 Fusion einer Messung mit der prädizierten Roboterlage 53

3.6.7 Zusammenfassung 53

3.7 Fusion der Daten des Multisensorsystems 53

3.7.1 Vorteile eines Multisensorsystems 53

3.7.2 Dezentrale Fusion der Sensordaten 55

3.7.3 Gesamtübersicht zur rekursiven Lokalisierung 58

Wesentliche Ergebnisse des Kapitels 58

4 Effiziente Auswertung von Sensordaten **60**

Einleitung 60

4.1 Winkelmeßsysteme 60

4.1.1 Formulierung des Problems 60

4.1.2 Bekannte Ansätze 62

4.1.3 Ein lineares Gleichungssystem für die Beobachterposition 62

4.1.4 Perturbationsanalyse 63

4.1.5 Bestimmung der Beobachterposition 64

4.2 Distanzsensor–Arrays beliebiger Geometrie 65

4.2.1 Formulierung des Problems 65

4.2.2 Bekannte Ansätze 66

4.2.3 Landmarkenmodelle 66

4.2.4 Bestimmung der Position von punktförmigen Landmarken 67

4.2.5 Bestimmung der Lage von ebenen Landmarken 71

4.2.6 Unterscheidung von Landmarkentypen 73

4.2.7 Spezialfall: Lineare Arrays 73

4.2.8 Spezialfall: Planare Arrays 76

4.2.9 Rekursive Formulierung 76

Wesentliche Ergebnisse des Kapitels 79

5 Experimentelle Validierung **81**

Einleitung 81

5.1 Multisensorsystem 82

5.1.1 Odometrie und Kreisel 83

5.1.2 Winkelmeßsystem 84

5.1.3 Ultraschallsensor–Array 85

5.2 Langstreckenexperiment: Flächendeckende Inspektion 87

Wesentliche Ergebnisse des Kapitels 90

6 Zusammenfassung und Ausblick **92**

A Ergänzungen zur Auswertung von Sensordaten **94**

A.1 Berechnung des Landmarkenabstands gemäß (4.14) 94

A.2 Jacobi–Matrizen zu Abschnitt 4.1.4 95

B Mengenbasierte Zustandsschätzung **96**
B.1 Beschreibung von Ellipsoiden . . . 96
B.2 Affine Transformation eines Ellipsoids . . . 96
B.3 Volumen eines Ellipsoids . . . 96
B.4 Transformation eines Ellipsoidenpaars . . . 97
B.5 Minkowski–Summe zweier Ellipsoide . . . 98
B.5.1 Spezialfall: Addition von skalaren Größen . . . 99
B.6 Zusammenfassung von Zuständen . . . 100
B.7 Ergänzungen zur statischen Zustandsschätzung . . . 101
B.7.1 Beweis von Satz 2.5 . . . 101
B.7.2 Beweis von Satz 2.6 . . . 101

C Das SSI–Filter **102**
C.1 Problemformulierung . . . 102
C.2 Zwei Informationsquellen . . . 103
C.2.1 Stochastische Fehler beliebiger Dichte . . . 103
C.2.2 Gaußverteilte stochastische Fehler . . . 104
C.3 N Informationsquellen . . . 106
C.3.1 Stochastische Fehler beliebiger Dichte . . . 106
C.3.2 Gaußverteilte stochastische Fehler . . . 108
C.4 Simulative Beispiele zur Lokalisierung mobiler Roboter . . . 108
C.5 Schlußbemerkungen . . . 110

Literaturverzeichnis **112**

Notation

Formelzeichen	Beschreibung
Allgemeines	
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit
Akzente und Indizes	
$\tilde{*}$	Wahrer Wert der Größe $*$
$\hat{*}$	Nominaler oder gemessener Wert der Größe $*$
$\Delta *$	Abweichung der Größe $*$ von $\hat{*}$
$*^{\mathrm{hyp}}$	Hypothetischer Wert für $*$
Skalare	
a, b, ... , α, β ...	Skalare
Spezielle Skalare	
k	Abkürzung für den Abtastzeitschritt Nr. k
ϕ_k^1, ϕ_k^2, ϕ_k^3	Gemessene Lenkwinkel von Rad 1 – 3
W_k^1, W_k^2, W_k^3	Gemessene Wege von Rad 1 – 3 zwischen Zeitpunkt $k-1$ und Zeitpunkt k
α_i	Gemessener absoluter Winkel i
γ_i	Zwischenwinkel i, $\gamma_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$
r^O	Abstand einer Landmarke vom Ursprung des Meßkoordinatensystems eines Distanzsensor–Arrays, $r^O = \|\underline{x}^O\|$
Vektoren	
$\underline{a}$, $\underline{b}$, ... , $\underline{A}$, $\underline{B}$, ... , $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, ...	Vektoren

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung der letzten Seite

Formelzeichen	Beschreibung
$\underline{a}(i)$	Element i eines Vektors, es gilt $\underline{a} = [\underline{a}(1), \underline{a}(2), \ldots, \underline{a}(i), \ldots]^T$
$\underline{a}(i:j)$	Teilvektor des Vektors $\underline{a}$, mit $\underline{a}(i:j) = [\underline{a}(i), \underline{a}(i+1), \ldots, \underline{a}(j-1), \underline{a}(j)]^T$
Spezielle Vektoren	
$\underline{0} = [0, 0, \ldots, 0]^T$	Nullvektor
$\underline{1} = [1, 1, \ldots, 1]^T$	Einsvektor
$\underline{\bar{x}}_k = [x_k, y_k]^T$	Allgemeine Roboterposition zum Zeitpunkt k
$\underline{x}_k = [x_k, y_k, \psi_k]^T$	Allgemeine Roboterlage zum Zeitpunkt k
$\underline{x}_k^{\Delta} = \left[x_k^{\Delta}, y_k^{\Delta}, \psi_k^{\Delta}\right]^T$	Inkrementelle Roboterlageänderung zum Zeitpunkt k
$\underline{x}_k^{P} = \left[x_k^{P}, y_k^{P}, \psi_k^{P}\right]^T$	Prädizierte Roboterlage zum Zeitpunkt k
$\underline{x}_k^{M} = \left[x_k^{M}, y_k^{M}, \psi_k^{M}\right]^T$	Roboterlage aus Messung zum Zeitpunkt k
$\underline{x}_k^{S} = \left[x_k^{S}, y_k^{S}, \psi_k^{S}\right]^T$	Geschätzte Roboterlage zum Zeitpunkt k
$\underline{x}_i^{\mathrm{LM}} = \left[x_i^{\mathrm{LM}}, y_i^{\mathrm{LM}}\right]^T$	Position der Landmarke i
$\underline{x}_{Ri} = [x_{Ri}, y_{Ri}]^T$	Position des Rades i bezüglich des Roboterkoordinatensystems
$\underline{x}_k^{\mathrm{DZ}} = \left[x_k^{\mathrm{DZ}}, y_k^{\mathrm{DZ}}\right]^T$	Lage des aktuellen Roboterdrehzentrums in kartesischen Koordinaten zum Zeitpunkt k
$\left[\phi_k^{\mathrm{DZ}}, \kappa_k^{\mathrm{DZ}}\right]^T$	Lage des aktuellen Roboterdrehzentrums in verallgemeinerten Polarkoordinaten zum Zeitpunkt k

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung der letzten Seite

Formelzeichen	Beschreibung
$\underline{C}_i = [C_i^x, C_i^y, C_i^z]^T$	Position des Empfängers i in einem Distanzsensor–Array bezüglich des Meßkoordinatensystems
$\underline{x}^O = [x^O, y^O, z^O]^T$	Position einer Landmarke bezüglich des Meßkoordinatensystems eines Distanzsensor–Arrays
$\underline{R} = [R_1, \ldots R_N]^T$	Gemessener Distanzvektor
Operationen mit Vektoren	
$\|\underline{a}\|$	Zwei–Norm von $\underline{a}$, $\|\underline{a}\| = \sqrt{\underline{a}^T \underline{a}}$
Matrizen	
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$	Matrizen
Spezielle Matrizen	
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\mathrm{diag}\,(\underline{a})$	Matrix mit den Elementen des Vektors $\underline{a}$ auf der Hauptdiagonalen, alle anderen Elemente Null
$\mathrm{shift}_N(\underline{x})$	$\mathrm{shift}_N(\underline{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}(1) & 0 & 0 & \ldots \\ \underline{x}(2) & \underline{x}(1) & 0 & \ldots \\ \underline{x}(3) & \underline{x}(2) & \underline{x}(1) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix}}_{N+1 \text{ Spalten}}$
$\mathbf{J}_{\underline{a}}^{\underline{b}}$	Jacobimatrix
$\mathbf{X}_k^{\triangle}$	Definitionsmatrix des Hüllellipsoids für alle inkrementellen Roboterlageänderungen zum Zeitpunkt k

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung der letzten Seite

Formelzeichen	Beschreibung
$\mathbf{X}_k^P$	Definitionsmatrix des Hüllellipsoids für alle prädizierten Roboterlagen zum Zeitpunkt k
$\mathbf{X}_k^M$	Definitionsmatrix des Hüllellipsoids für alle Roboterlagen aus der Messung zum Zeitpunkt k
$\mathbf{X}_k^S$	Definitionsmatrix des Hüllellipsoids für alle geschätzten Roboterlagen zum Zeitpunkt k
$\mathbf{X}_i^{\mathrm{LM}}$	Definitionsmatrix des Hüllellipsoids für alle Positionen der Landmarke i
Mengen	
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{Z}$	Mengen
Spezielle Mengen	
$\mathcal{M}_{N,M}$	Menge aller Matrizen mit N Zeilen und M Spalten
$\mathcal{X}_k^{\Delta}$	Menge aller inkrementellen Roboterlageänderungen zum Zeitpunkt k
$\mathcal{X}_k^P$	Menge aller prädizierten Roboterlagen zum Zeitpunkt k
$\mathcal{X}_k^M$	Menge aller Roboterlagen aus der Messung zum Zeitpunkt k
$\mathcal{X}_k^S$	Menge aller geschätzten Roboterlagen zum Zeitpunkt k
$\mathcal{X}_i^{\mathrm{LM}}$	Menge aller Positionen der Landmarke i
Operationen mit Mengen	
$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{A})$	Volumen der Menge $\mathcal{A}$
$\mathrm{proj}_S\,(\mathcal{A})$	Projektion der Menge $\mathcal{A}$ auf S
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	Schnittmenge von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung der letzten Seite	
Formelzeichen	Beschreibung
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	Vereinigungsmenge von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
$a \in \mathcal{B}$	a ist Element von $\mathcal{B}$
$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ ist Teilmenge von $\mathcal{B}$
$\mathcal{A} + \mathcal{B}$	Minkowski–Summe von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$

Lokalisierung eines mobilen Roboters mittels effizienter Auswertung von Sensordaten und mengenbasierter Zustandsschätzung

Diese Arbeit beschreibt ein integriertes Verfahren zur Initialisierung und rekursiven Stützung der Schätzung der Lage eines mobilen Roboters mit Hilfe eines bordeigenen Multisensorsystems. Es werden zwei Typen von Geometriesensoren zur Vermessung von Umweltmerkmalen betrachtet: Reine Winkelmeßsysteme sowie Distanzsensor–Arrays beliebiger Geometrie. Für beide Sensortypen werden geschlossene Lösungen zur Bestimmung der Roboterlage bezüglich der Umweltmerkmale entwickelt. Die Berücksichtigung von sowohl Meßfehlern als auch Unsicherheiten der Lage der Umweltmerkmale ist dabei integraler Lösungsbestandteil. Zur Fusion der Daten verschiedener Sensoren wird ein mengenbasiertes, dezentrales Fusionsschema verwendet. Hierzu wird ein neuer Lösungsformalismus für ellipsoidförmige Mengen vorgestellt, welcher zu nichtlinearen Schätzalgorithmen führt, die eine unkomplizierte Behandlung von systematischen und korrelierten Unsicherheiten erlauben und durch ihre kompakte Form Echtzeitanforderungen genügen. Die Präzision, Robustheit und Langzeitstabilität des vorgeschlagenen Verfahrens wurde mit dem omnidirektionalen Serviceroboter ROMAN durch täglichen Dauereinsatz und in Langstreckenexperimenten mit mehr als einem Kilometer Fahrtstrecke bei Geschwindigkeiten von bis zu 1 m/s nachgewiesen.

Mobile Robot Localization Based on Efficient Processing of Sensor Data and Set–theoretic State Estimation

This thesis proposes an integrated approach for initialization and recursive estimation of the posture of a mobile robot based on data from an onboard multisensor system. For locating environmental features used as landmarks, two types of geometry sensors are considered: Angle measurement devices and range sensor arrays with an arbitrary geometry. For both sensing principles efficient closed–form solutions are derived for calculating the robot posture with respect to the landmarks. These solutions include the consideration of both measurement errors and landmark position uncertainties as an integral part. Fusing data from different sensors is done by a set–theoretic decentralized fusion scheme. For that purpose, a new solution framework for ellipsoidal sets is given, which leads to nonlinear estimators, that allow the uncomplicated treatment of systematic and correlated uncertainties. The compact form of the resulting estimators guarantees real–time capabilities. Accuracy, robustness, and long term stability of the proposed approach have been demonstrated by means of a prototype implementation that is used to navigate the omnidirectional mobile service robot ROMAN on a day–by–day basis. Experiments include long range navigation with path lengths of more than one kilometer and velocities of up to 1 m/sec.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

In den nächsten Jahren wird sich die Anwendung frei navigierender Serviceroboter verstärkt auf nichtindustrielle Bereiche ausdehnen. Als typische Einsatzgebiete sind dabei Innenräume wie Büros, Laboratorien und Krankenhäuser zu sehen. Dort können Serviceroboter einfache Routinetätigkeiten übernehmen [121]. Hierzu gehören der Transport von Kleinteilen wie Post, Bücher und Geschirr, einfache Aufräumarbeiten und flächendeckende Bearbeitungen wie z.B. die Bodenreinigung. Zur Durchführung dieser Aufgaben ist eine ausreichend genaue Lokalisierung des mobilen Roboters, d.h. die Schätzung seiner Lage (Position und Orientierung), notwendig.

Weiterhin muß der Roboter in teilweise engräumiger Umgebung direkt Einfluß auf seine Umwelt nehmen, z.B. Türen öffnen und Gegenstände bewegen, was neben einer Manipulationskomponente auch eine hohe Beweglichkeit des Roboters erfordert. Dies führt zu besonderen Fahrwerkskonstruktionen mit geringen Radabständen, die komplexe Manöver und abrupte Fahrtrichtungswechsel erlauben. Eine inkrementelle Lageschätzung durch Fortschreibung einer bekannten Anfangslage mit Hilfe von Odometriesensoren ist deshalb ungenau und wegen der rasch akkumulierenden Lagefehler nicht für die in Serviceaufgaben typischen langen Wegstrecken geeignet. Zur Gewährleistung von Langzeitstabilität muß die Lage des Roboters daher entweder von einem externen Sensor vermessen werden oder der Roboter muß von Zeit zu Zeit Umweltmerkmale mit bordeigenen Sensoren vermessen, um seine Lage zu bestimmen. Die erste Möglichkeit läßt sich nur für streng begrenzte Arbeitsräume realisieren und erfordert außerdem eine unterbrechungsfreie Kommunikation zwischen dem Roboter und dem externen Sensor. Die zweite Möglichkeit ist daher für die Lokalisierung von Servicerobotern besser geeignet.

Darüberhinaus ist eine Trennung der Arbeitsräume von Roboter und Mensch bei den obengenannten Serviceaufgaben nicht möglich. Das bedeutet auf der einen Seite, daß der Roboter die dadurch entstehenden Unwägbarkeiten berücksichtigen muß; auf der anderen Seite muß eine Gefährdung des Menschen durch den Roboter sicher ausgeschlossen werden, der Roboter darf nicht „außer Kontrolle“ geraten. Eine Lokalisierungseinrichtung muß ihre Aufgabe daher zuverlässig erfüllen.

1.2 Anforderungen und Ziele

Der Erfolg von Servicerobotern in den oben beschriebenen neuen Anwendungsfeldern wird entscheidend von der Verfügbarkeit geeigneter Lokalisierungseinrichtungen abhängen. Diese sollten auf einfachen, bordeigenen Sensoren basieren, die sich zur preiswerten Massenfertigung eignen. Einschränkungen gegenüber komplexen Sensoren wie eine reduzierte Informationsdichte, Fertigungstoleranzen und mangelhafte Kalibrierung müssen durch den Einsatz mehrerer Sensoren, eine intelligente Meßwertaufnahme und eine adäquate Signalverarbeitung

kompensiert werden. Ein geeigneter Algorithmus zur Lokalisierung muß also die Meßwertaufnahme in Abhängigkeit von der Umgebungssituation steuern, die Daten mehrerer Sensoren kombinieren und den maximalen Informationsgehalt der Sensordaten zur Lagebestimmung nutzen.

Die Lageschätzung muß zunächst initialisiert werden, was nicht nur zu Beginn einer Serviceaufgabe, sondern auch nach einem Systemneustart oder bei zu großen Abweichungen zwischen geschätzter und tatsächlicher Lage notwendig ist. Während der Fahrt muß dann eine ständige, schritthaltende Lokalisierung durchgeführt werden, wobei zu beachten ist, daß die verwendeten Serviceroboter höhere Geschwindigkeiten als ihre industriellen Vorläufer erreichen. Das Lokalisierungsverfahren sollte dabei auch über lange Strecken ohne Zwischenstops mit ausreichender Genauigkeit stabil arbeiten. Beim Öffnen einer Tür oder bei der Bodenreinigung mit überlappenden Spuren sind maximale Abweichungen von ± 5 cm in der Position und $\pm 1^o$ in der Orientierung zwischen der tatsächlichen und der geschätzten Lage zu fordern. Beim Durchqueren von Fluren sind aber Abweichungen von ± 10 cm in der Position und $\pm 2^o$ in der Orientierung durchaus tolerierbar. Die Redundanz in den vorhandenen Landmarken sollte aber so hoch sein, daß diese Werte auch eingehalten werden, wenn es durch im Arbeitsraum befindliche Personen zu Störungen des Meßvorgangs oder Landmarkenverdeckungen kommt. Außerdem soll das Lokalisierungsverfahren auch bei reaktiven Fahrmanövern, wie z.B. abrupten Ausweichmanövern, nicht divergieren. Kommt es dennoch zu nicht tolerierbaren Abweichungen, so sollte dies vom Roboter selbst detektiert werden, zu einer kurzzeitigen Unterbrechung der Serviceaufgabe und zu einer Neuinitialisierung führen.

Zur Lokalisierung mit bordeigenen Sensoren müssen in der Umgebung Strukturen vorhanden sein, welche als Landmarken zur Lokalisierung verwendet werden können. Hierbei kann es sich um natürlich vorhandene Strukturen wie Wände und Mobiliar handeln; reichen diese nicht aus, sind auch zusätzliche künstliche Landmarken denkbar.

Der Roboter sollte *automatisch* die zur Lokalisierung am besten geeigneten Landmarken auswählen und passende Sensoren zu deren Vermessung verwenden. Bei der Erstellung der dazu notwendigen Umweltkarte kommt es zu unvermeidbaren Unsicherheiten in den Landmarkenlagen. Diese sollten zusammen mit den Meßunsicherheiten bei der Lokalisierung berücksichtigt werden, um die Unsicherheit der Roboterlageschätzung auf der einen Seite zu minimieren, aber auf der anderen Seite auch möglichst realitätsnah zu quantifizieren. Diese realitätsnahe Angabe der Unsicherheit der Lageschätzung ist wichtig für 1. die Bestimmung der Korrespondenz von Meßwerten zu Landmarken, 2. die Fusion von Daten unterschiedlicher Sensoren und 3. die Entscheidung, ob die aktuelle Genauigkeit für den Vollzug der Serviceaufgabe ausreicht.

Ziel dieser Arbeit ist es also, Algorithmen zur effizienten Verarbeitung der Daten von Sensoren geringer Komplexität unter Berücksichtigung der typischen Unsicherheiten zu entwickeln. Außerdem ist ein Formalismus für die Fusion der Daten verschiedener Sensoren zu entwerfen, der eine unkomplizierte Behandlung von korrelierten und systematischen Fehlern erlaubt, aber trotzdem zu leicht implementierbaren und echtzeitfähigen Algorithmen führt. Auf dieser Grundlage soll dann ein integriertes Verfahren zur Initialisierung und rekursiven Stützung der Schätzung der Lage eines in der Ebene beweglichen mobilen Roboters mit Hilfe eines bordeigenen Multisensorsystems entworfen und auf einem realen Roboter implementiert werden. Im Rahmen von Serviceaufgaben sollen die für den Alltagsbetrieb notwendigen, harten Anforderungen erfüllt werden, so daß das entwickelte Verfahren als Grundbaustein für spätere Serienprodukte dienen kann.

1.3 Stand der Technik und Beitrag dieser Arbeit

Im folgenden wird kurz auf die einschlägige Literatur eingegangen. Detaillierte Ausführungen zum Stand der Technik finden sich in Abschnitt 4.1.2, in Abschnitt 4.2.2 und in Abschnitt 2.1.

Die Lokalisierung stellt immer noch eines der Hauptprobleme beim Einsatz mobiler Roboter dar. Einige der in der Literatur beschriebenen Verfahren finden nur geringe Verbreitung, da sie zu komplexe Sensoraufbauten benötigen. Hier sind zum einen technisch aufwendige Sensoren wie z.B. Laserentfernungssensoren und zum anderen externe Einrichtungen zur Lagebestimmung zu nennen. Viele Verfahren gehen von Voraussetzungen aus, welche in Simulationen oder unter Laborbedingungen, nicht aber in realen Situationen gegeben sind. Hierzu gehört vor allem die Vernachlässigung systematischer Fehler und korrelierter Störgrößen [24] sowie die Annahme exakt bekannter Landmarken. Weiterhin gibt es Verfahren, welche aufgrund ihrer iterativen Natur oder ihrer Komplexität nicht zur schritthaltenden Lokalisierung geeignet sind [13]. In dieser Arbeit liegt deshalb der Schwerpunkt auf einer intelligenten Sensordatenverarbeitung auf der Basis analytischer Verfahren, so daß eine zuverlässige Lokalisierung auch mit einem einfachen, bordeigenen Multisensorsystem möglich ist. Neben Sensoren zur inkrementellen Bestimmung der Lageänderungen des Roboters werden Geometriesensoren zur Vermessung von bestimmten Umweltmerkmalen eingesetzt, welche als Landmarken verwendet werden. Hierbei werden zwei Typen von Geometriesensoren betrachtet, die sich durch einen einfachen Aufbau und einen niedrigen Preis auszeichnen: 1. Laserbasierte Winkelmeßsysteme sowie 2. Ultraschallsensor–Arrays beliebiger Geometrie [111].

Zur **Lokalisierung durch Messung von Winkeln zu bekannten Landmarken** existiert für den Fall von drei Marken eine geschlossene Lösung, die in [23, 30] Verwendung findet. Zur Nutzung der Redundanz für den Fall von $N > 3$ Landmarken wird in [28] ein heuristisches Verfahren zur Auswahl der „besten“ drei Landmarken vorgestellt. Andere Autoren schlagen die Mittelung aller möglichen Tripel–Lösungen vor oder verwenden iterative Lösungsverfahren [21]. In [22] wird eine geschlossene Lösung vorgestellt, welche zunächst N Zwischengrößen aus $N(N-1)$ Gleichungen ermittelt und aus diesen Zwischengrößen anschließend die Roboterposition bestimmt. Unsicherheiten werden nicht berücksichtigt.

Ein etwas anderer Ansatz wurde in [2, 3] gewählt, wo Landmarken von zwei Sensoren vermessen werden und damit eine Triangulation möglich ist. Es stellt sich damit das Stereo–Korrespondenzproblem, welches durch die Verwendung einer verschiebbaren Kamera und der damit möglichen Verfolgung der Landmarken gelöst wird. Dadurch war bei der Lokalisierung eines mobilen Roboters allerdings bisher nur ein Stop–and–Go–Betrieb möglich.

Hier wird ein neuer Algorithmus zur Bestimmung der Roboterposition und Orientierung aus N Winkelmessungen zu bekannten Landmarken vorgestellt, welcher aus $N-1$ bzw. N *linearen Gleichungen* besteht [116]. Aufgrund der Linearität in der gesuchten Lage läßt sich dieses Gleichungssystem schnell und zuverlässig lösen. Darüberhinaus hängt die Anzahl der zu lösenden Gleichungen nur linear von der Landmarkenanzahl ab. Somit sind auch Probleme realistischer Größe mit geringem Aufwand zu behandeln. Da bei der Herleitung des Gleichungssystems *keinerlei Approximationen* erforderlich sind, resultiert eine präzise Lageschätzung.

Zur **Lagebestimmung mit Hilfe des zweiten Meßprinzips, d.h. mit Ultraschallsensoren**, werden diese von den meisten Autoren einzeln ausgewertet [1, 6, 7, 8, 16], wodurch das Potential dieser Sensoren nicht ausgeschöpft wird. Eine entscheidende Verbesserung ergibt sich bei Verwendung von Ultraschallsensor–Arrays. Zur Lokalisierung von Landmarken mit einfachen Array–Geometrien und wenigen Sensoren finden sich geschlossene Lösungen in

[32, 33, 46, 47, 48, 53, 54, 58, 59, 60, 62]. Für den Fall vieler Sensoren werden in [49] rasterbasierte Pulsholographie–Verfahren vorgeschlagen, wobei allerdings der damit verbundene Rechenaufwand sehr hoch ist. Analytische Lösungen für das Lokalisierungsproblem verwenden häufig eine Fernfeldapproximation [57], was jedoch insbesondere in engräumiger Umgebung zu ungenau ist. Auf der anderen Seite führt die *direkte* Lösung der exakten nichtlinearen Meßgleichungen im Sinne der kleinsten Quadrate für ein Array beliebiger Geometrie auf ein iteratives Optimierungsverfahren, was für die meisten Applikationen nicht wünschenswert ist. Zudem werden die in einer realen Situation auftretenden Meßfehler in den meisten Ansätzen nicht oder nur in stark vereinfachter Form berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit wird durch Transformation der Meßgleichungen eine *exakte*, effektive Lösung für die Lokalisierung von Umweltmerkmalen mit einem Ultraschallsensor–Array mit beliebiger Sensoranzahl und Geometrie hergeleitet [118].

Für beide Sensorprinzipien, Winkelmeßsysteme und Ultraschallsensor–Arrays, werden sowohl Meßfehler als auch Unsicherheiten der Lage der Landmarken als integraler Bestandteil der Lokalisierungsalgorithmen berücksichtigt.

Die **Initialisierung der Lageschätzung** wird bei vielen Untersuchungen ausgeklammert und eine genügend genaue Anfangslage vorausgesetzt [7, 8, 14, 20, 21]. Das Problem der Bestimmung der Korrespondenz von Messungen und Landmarken wird dadurch umgangen. Hier wird auf der Grundlage der neuen Lokalisierungsalgorithmen ein schnelles Verfahren zur Korrespondenzfindung, d.h. zur Zuordnung von Meßwerten zu Landmarken, entwickelt, welches Landmarkenverdeckungen und im Gegensatz zu [23, 26] auch Fehlmessungen toleriert.

Zur schritthaltenden Lokalisierung während der Fahrt werden häufig von der aktuellen Situation unabhängige Verfahren zur Meßwertaufnahme [7, 8, 16, 37], d.h. Sensoren mit einer vorab festgelegten Meßsequenz, eingesetzt. Damit bleibt die aus vorangegangenen Messungen gewonnene Lageschätzung und damit die Information aus einem Umweltmodell bei der Vermessung von Umweltmerkmalen ungenutzt. Im Gegensatz dazu werden in [9, 10] örtliche und zeitliche Stetigkeitsbedingungen genutzt, um ein Fahrzeug mit Hilfe eines Bildverarbeitungssystems bei hoher Geschwindigkeit entlang einer Straße zu führen. Diese Qualität wird erreicht, indem mit Hilfe eines Systemmodells interessante Merkmale prädiziert werden, die dann eine intelligente Fokussierung der verfügbaren Verarbeitungsleistung auf sinnvolle Bildbereiche ermöglichen.

Diese Idee wird auch in der vorliegenden Arbeit genutzt, um eine **rekursive Stützung der Lageschätzung** durchzuführen: Durch Merkmalsprädiktion mit Hilfe von Sensoren zur inkrementellen Lageschätzung werden die verfügbaren Geometriesensoren auf nützliche Merkmale optimal ausgerichtet und außerdem Meßwerthypothesen gebildet. Dadurch können zum einen Ausreißer leicht eliminiert werden, so daß die Meßwertaufnahme störunanfälliger wird. Zum anderen können Mehrdeutigkeiten im Meßprozeß aufgelöst werden, so daß die nachfolgende Sensordatenverarbeitung schneller wird. Damit werden also die begrenzten Meß– und Verarbeitungsressourcen im Sinne einer zuverlässigen Lokalisierung optimal genutzt.

Zur Verrechnung der Daten verschiedener Sensoren werden üblicherweise statistisch motivierte Ansätze wie Kalman–Filterung verwendet [7, 8, 16, 14, 20, 24]. Aus Komplexitätsgründen [72] werden dabei meist systematische und korrelierte Fehler vernachlässigt [6, 16]. Als Alternative zu statistischen Ansätzen bei der Lokalisierung von mobilen Robotern haben sich z.B. in [2, 3, 89] mengenbasierte Verfahren bewährt, welche auf Intervallrechnung beruhen. Auch in dieser Arbeit wird ein mengenbasiertes Fusionsschema verwendet, wobei aber nicht Intervallen, d.h. komponentenweisen Grenzen, sondern Ellipsoide zur Eingrenzung von Lösungsmengen [80, 81, 88, 96, 97, 98, 100] verwendet werden. Dieses Vorgehen erlaubt

zum einen die Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den geschätzten Größen und ist zum anderen unabhängig von der Wahl der Bezugskoordinatensysteme. Zur Fusion wird ein neuer Formalismus vorgestellt, welcher die Algorithmen in [98] für beliebige Dimensionen generalisiert und zu nichtlinearen Schätzalgorithmen führt, die eine einfache Behandlung korrelierter und systematischer Fehler erlauben und zudem Echtzeitanforderungen genügen.

1.4 Übersicht über die Arbeit

Die zur mengenbasierten Zustandsschätzung benötigten Algorithmen sind der Gegenstand von Kapitel 2. Die Darstellung ist in drei Teile gegliedert und umfaßt 1. die Kombination von Zustandsschätzungen, 2. statische Systeme und 3. dynamische Systeme.

Kapitel 3 stellt ein integriertes Verfahren zur Initialisierung und rekursiven Stützung der Schätzung der Lage eines in der Ebene beweglichen mobilen Roboters vor. Es wird dabei von einem bordeigenen Multisensorsystem ausgegangen, welches aus Sensoren zur Bestimmung von inkrementellen Lageänderungen sowie Geometriesensoren zur Vermessung von Umweltmerkmalen besteht. Als Geometriesensoren werden *reine* Winkel– und *reine* Distanzsensoren betrachtet. Zur Fusion der Daten dieser Sensoren wird ein mengenbasiertes, dezentrales Fusionsschema beschrieben, wobei neben der allgemeinen Vorgehensweise auch ein Verfahren für den speziellen Fall eines omnidirektionalen Roboters betrachtet wird.

Eine Besonderheit des hier verfolgten Ansatzes ist die Verwendung *geschlossener Lösungen* für 1. die Bestimmung der Roboterlage aus N Winkelmessungen zu bekannten Landmarken, und 2. die Bestimmung der Lage von typischen Landmarken mit Hilfe von Distanzsensor–Arrays. Die genaue Kenntnis dieser Algorithmen ist für das Verständnis des Lokalisierungsverfahrens in Kapitel 3 nicht erforderlich. Sie werden deshalb in Kapitel 3 der Übersichtlichkeit halber zunächst als gegeben angenommen und anschließend in Kapitel 4 im Detail hergeleitet.

Kapitel 5 enthält eine Beschreibung der Implementierung des vorgeschlagenen Verfahrens auf dem omnidirektionalen mobilen Roboter ROMAN und der erzielten Ergebnisse. Es werden Langstreckenexperimente zur flächendeckenden Inspektion vorgestellt, welche eine besonders hohe Präzision und Langzeitstabilität der Lokalisierungsverfahren verlangen.

Kapitel 6 faßt die Besonderheiten des verfolgten Ansatzes zusammen und diskutiert weiterführende Arbeiten, welche zu weiteren Verbesserungen führen könnten. Insbesondere wird ein neuer Filtertyp, das SSI–Filter [117], betrachtet, welches die in realen Systemen simultan auftretenden stochastischen und deterministischen Fehler explizit behandelt.

Kapitel 2

Mengenbasierte Zustandsschätzung

Einleitung

Dieses Kapitel stellt diejenigen Algorithmen vor, die in den Kapiteln 3 und 4 zur Zustandsschätzung benötigt werden. Auftretende Unsicherheiten werden durch mengenbasierte Methoden in die Schätzung einbezogen, wobei diese Unsicherheiten lediglich durch Amplitudengrenzen in Form von abgeschlossenen Mengen beschrieben sind. Aus der Schätzung ergeben sich damit Mengen, welche Lösungen für die gesuchten Zustände definieren. Mengenbasierte Verfahren sind somit eine gute Alternative zu klassischen statistischen Methoden, falls die vorliegenden Unsicherheiten stark korrelierter oder gar deterministischer Natur sind. In diesem Fall liefern statistisch motivierte Schätzer zu optimistische Ergebnisse, falls zur Begrenzung der Komplexität ungerechtfertigte Annahmen über die Unabhängigkeit der involvierten Größen getroffen werden. Die mengenbasierte Zustandsschätzung hingegen verzichtet auf die üblichen Unabhängigkeitsannahmen und führt zum Entwurf einfacher nichtlinearer Schätzer, welche die Eigenschaft der *selektiven Fusion* aufweisen: Es wird nur diejenige Information zur Fusion verwendet, welche die Unsicherheit über den gesuchten Zustand auch tatsächlich verringert.

2.1 Bekannte Ansätze

Verfahren zur mengenbasierten Zustandsschätzung wurden in den letzten 30 Jahren parallel zu den statistischen Methoden entwickelt, wenngleich die Entwicklung nicht ganz so stürmisch verlief. In der Mathematik sind mengenbasierte Methoden zwar schon seit langem bekannt, der Grundstein für ihre Verwendung zur Einbeziehung von Unsicherheiten bei der Zustandsschätzung wurde aber erst in [99] gelegt. Die tatsächlichen Mengen werden dort durch Ellipsoide beschrieben, was vielerorts als eine zu grobe Approximation abgelehnt wurde. Dies führte zu der Entwicklung von Verfahren, welche die tatsächlichen Mengen durch Polytope einschließen [101, 102], wobei sich allerdings das Problem ergibt, daß bei wiederholter Anwendung mengentheoretischer Operationen die Anzahl der Seiten der Polytope zunimmt. Es muß also von Zeit zu Zeit eine Reduktion der Seiten vorgenommen oder von vorneherein mit einer konstanten Seitenanzahl gearbeitet werden. Den Extremfall bilden dabei achsenparallele (Hyper–)Rechtecke [3, 93], die zwar konzeptionell und implementatorisch sehr einfach zu handhaben sind, in vielen Applikationen aber die Menge der gesuchten Zustände nicht eng genug einschließen. Die erzielten Ergebnisse hängen außerdem von der Wahl der Koordinatensysteme ab. In vielen Anwendungen werden deshalb doch ellipsoidförmige Mengen verwendet [96], da sie einen guten Kompromiß zwischen der Qualität der Approximation und der Komplexität in der Verarbeitung darstellen. Außerdem kann die Qualität der Approximation durch die Verwendung von Schnitt– und Vereinigungsmengen von Ellipsoiden [80] entscheidend verbessert werden. Dies ist ähnlich zu der Vorgehensweise in [70] im stochastischen Kontext, wo beliebige Verteilungsdichten durch die Summe von Gaussdichten approximiert werden.

Die Schätzung des Zustands eines zeitdiskreten dynamischen Systems besteht aus einem Prädiktions– und einem Fusionsschritt. Zur Prädiktion wird die Schätzung des letzten Zeitschrittes mit Hilfe eines Systemmodells fortgeschrieben, was bei einem linearen System einer MINKOWSKI–Summation zweier Ellipsoide entspricht. Erste Ansätze für die effiziente Fortschreibung finden sich in [100], wo zur Bildung eines Hüllellipsoids für die exakte MINKOWSKI–Summe eine gewichtete Kombination der zwei Ellipsoide verwendet wird. Es wird vorgeschlagen, die Gewichtungsfaktoren so zu wählen, daß sich ein minimalvolumiges Hüllellipsoid ergibt, ohne daß hierzu ein Verfahren angegeben wird. Ein etwas anderes Vorgehen und erste Ansätze zur Bestimmung einer optimalen Gewichtung finden sich in [80].

Aus der Fortschreibung und einer Beobachtung ergeben sich nun zwei konkurrierende Informationen über den gesuchten Zustand in Form von zwei Mengen, die fusioniert werden können. Die mengenbasierte Fusion besteht in der Schnittmengenbildung, so daß die beiden Mengen also auf gemeinsame Punkte, d.h. auf Überlappung, geprüft werden müssen. In [100] wird einfach davon ausgegangen, daß die Beobachtung die Voraussetzungen erfüllt und sich dadurch immer eine Überlappung ergibt. In einer praktischen Situation muß dies allerdings nicht zutreffen. In [92, 95] werden zur Lösung dieses Problems Überlappungstests vorgeschlagen, welche die iterative Lösung eines Optimierungsproblems erfordern. Das Vorgehen von [92] wird in [103] kritisiert und ein anderer Überlappungstest vorgeschlagen, der die iterative Bestimmung der Nullstelle einer implizit gegebenen rationalen Funktion im Intervall $[-\infty, 0]$ benötigt. Dies ist für on–line Anwendungen nicht zweckmäßig.

Überlappen nun die Menge der durch die Beobachtung gegebenen Zustände und die Menge der fortgeschriebenen Zustände, so kann eine Fusion stattfinden. Da die Schnittmenge zweier Ellipsoide im allgemeinen nicht wieder ein Ellipsoid ist, muß ein äußeres Hüllellipsoid gefunden werden, falls ein einfaches rekursives Verfahren gewünscht wird. Die optimale Lösung dieses Problems, d.h. die Bestimmung eines Hüllellipsoids mit minimalem Volumen, führt auf ein numerisches Optimierungsproblem mit linearen Matrix–Ungleichungsnebenbedingungen [79]. Erste Gedanken zur einfachen, suboptimalen Bestimmung eines Hüllellipsoids durch konvexe, gewichtete Kombination finden sich in [90], der gleiche Ansatz wird in [100] verwendet. Konkrete Verfahren zur Bestimmung der Gewichtungsfaktoren werden in beiden Fällen nicht gegeben.

Für MISO[1)]–Systeme, d.h. eindimensionale Beobachtungen, wurden auf dem Gebiet der Systemidentifikation geschlossene Lösungen zur Bestimmung eines Hüllellipsoids entwickelt [85, 86, 88, 97], wobei sich diese auch zur effizienten, parallelen Implementierung eignen [87]. Diese Verfahren wurden in [98] für Anwendungen in der Robotik erschlossen. In [81] werden sogar Hinweise dazu gegeben, wie in diesem Fall durch eine Vortransformation der Beobachtungen das optimale Hüllellipsoid aus dem suboptimalen gewonnen werden kann.

Für den Fall von MIMO[2)]–Systemen, d.h. vektorieller Beobachtungen, existieren überraschenderweise keine geschlossenen Lösungsverfahren für die Bestimmung des minimalvolumigen Hüllellipsoids. Da sich aber die Fusion einer vektoriellen Beobachtung nur in Spezialfällen auf die sequentielle Fusion ihrer Komponenten zurückführen läßt[3)], ist dieser Fall außerordentlich wichtig.

[1)] **M**ultiple **I**nput **S**ingle **O**utput

[2)] **M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput

[3)] Dies steht im Gegensatz zu stochastischen Fusionsmethoden, wo die Fusion einer vektoriellen Beobachtung auch im Fall korrelierter Komponenten nach Diagonalisierung der Kovarianzmatrix immer sequentiell durchgeführt werden kann [71].

Zusammenfassend kann man also sagen, daß in der Literatur ein solides Fundament zur Anwendung mengentheoretischer Methoden auf das Problem der Zustandsschätzung besteht. Nichtsdestoweniger stehen einige für den praktischen Einsatz dieser Methoden wichtige Erkenntnisse noch aus. Außerdem werden für die auftretenden Teilprobleme wegen der unterschiedlichen Applikationen verschiedene Lösungsansätze gewählt. Hier wäre ein einheitlicher Lösungsformalismus sinnvoll. Erst dieser könnte den mengenbasierten Methoden zu einer ähnlichen Verbreitung bei der Behandlung von amplitudenbegrenzten Unsicherheiten verhelfen, wie sie statistische Verfahren durch das KALMAN–Filter erfahren haben.

2.2 Ziel und verfolgte Methodik

Das Ziel dieses Kapitels ist die Herleitung eines einheitlichen Formalismus zur Lösung der im Rahmen der mengenbasierten dezentralen Zustandsschätzung auftretenden Probleme wie 1. die Kombination von Zustandsschätzungen, 2. die Lösung überbestimmter Gleichungssysteme, wenn der Gleichungsfehlervektor durch Amplitudengrenzen beschrieben wird, und 3. die Schätzung des Zustands eines dynamischen Systems, d.h. die Fortschreibung einer Schätzung mit Hilfe eines Systemmodells und deren Stützung durch Beobachtungen. Hierbei soll vor allem auch der MIMO–Fall sauber und korrekt behandelt werden. Es wird Wert darauf gelegt, daß die Algorithmen nicht iterativer Natur sind, so daß die gewünschten Ergebnisse nach einer festen Anzahl von Rechenoperationen zur Verfügung stehen. Weiterhin soll eine Implementierung einfach möglich sein.

Es werden daher wie in einigen der obengenannten Ansätze [80, 85, 86, 87, 88, 97, 98, 99, 100] einfache Mengen wie Ellipsoide und zusätzlich deren degenerierte Formen verwendet. Zur Approximation von komplizierten Mengen, die z.B. bei der Bildung der Schnittmenge oder bei der MINKOWSKI–Summation zweier Ellipsoide entstehen, werden ähnlich wie in [80, 98, 100] Hüllellipsoide verwendet, die sich als gewichtete Kombination der ursprünglichen Ellipsoide ergeben. Hier werden jedoch sämtliche bei der Berechnung der Gewichtungsfaktoren auftretenden Probleme gelöst und mit dem gleichen Verfahren behandelt.

Die Hüllellipsoide sind damit effizient berechenbar, und es ergeben sich einfache nichtlineare Zustandsschätzer. Ihre äußere Form ähnelt stark statistisch motivierten Schätzern, welche unter der Voraussetzung entworfen wurden, daß sich alle Unsicherheiten als weißes und gaußverteiltes Rauschen modellieren lassen. Das Verhalten ist jedoch völlig unterschiedlich.

2.3 Überblick über das Kapitel

Die gewählte Darstellung ist an den Aufbau der Arbeit angepaßt und in drei Teile gegliedert:

- **Kombination von Zustandsschätzungen:** Im Abschnitt 2.4 wird zunächst der wichtige Fall vorgestellt, daß der gesuchte Zustand gleichzeitig durch zwei Mengen definiert ist. Die entwickelten Algorithmen finden im dezentralen Fusionsschema in Kapitel 3 bei der Aggregation der Zustandsschätzungen verschiedener Fusionsknoten Anwendung.

- **Zustandsschätzung für statische Systeme:** Im Abschnitt 2.5 geht es um die Lösung überbestimmter Gleichungssysteme, wenn der Gleichungsfehlervektor durch harte Amplitudengrenzen beschrieben wird. Derartige Gleichungssysteme treten wiederholt in Kapitel 4 auf.

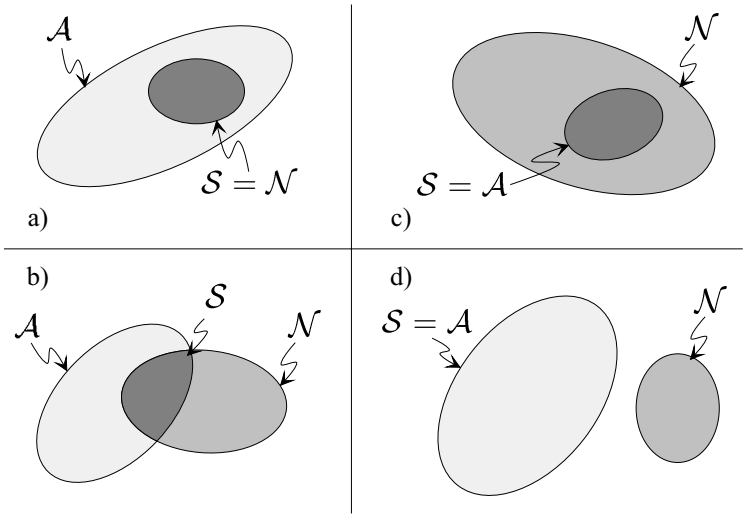


Abbildung 2.1: Die vier Konfigurationen für die relative Lage von zwei Ellipsoiden $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ und die sich daraus ergebende Schnittmenge $\mathcal{S}$, wobei es sich bei der Wahl von $\mathcal{S} = \mathcal{A}$ in Fall d) um eine willkürliche Entscheidung handelt (zweidimensionale Visualisierung).

- ◇ **Zustandsschätzung für dynamische Systeme:** Im Abschnitt 2.6 werden Algorithmen zur mengenbasierten Schätzung des Zustands eines dynamischen Systems hergeleitet. Diese Algorithmen finden bei der rekursiven Lokalisierung eines mobilen Roboters gemäß Kapitel 3 Anwendung.

Zuletzt wird die Erhöhung der Robustheit von mengenbasierten Zustandsschätzern gegenüber Modellierungsfehlern diskutiert. Dies ist notwendig, weil mengenbasierte Verfahren üblicherweise empfindlich auf untermodellierte Amplitudengrenzen reagieren. Darum werden häufig die Amplitudengrenzen bewußt zu groß gewählt, was aber zu konservativen Ergebnissen führt. In dieser Arbeit wird daher ein Verfahren zur robusten mengenbasierten Zustandsschätzung auf der Basis von Konsistenzmaßen hergeleitet, welches erlaubt, die vorliegenden Unsicherheiten sinnvoll zu modellieren.

2.4 Kombination von Zustandsschätzungen

Ein gesuchter Zustand $\underline{x}$ sei gleichzeitig durch zwei ellipsoidförmige Mengen $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{N}$ definiert, d.h., es gilt $\underline{x} \in \mathcal{A}$ und $\underline{x} \in \mathcal{N}$. Die Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{N}$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ \underline{x} : (\underline{x} - \underline{\hat{a}})^T \mathbf{A}^{-1} (\underline{x} - \underline{\hat{a}}) \leq 1 \right\} \quad , \\ \mathcal{N} &= \left\{ \underline{x} : (\underline{x} - \underline{\hat{n}})^T \mathbf{N}^{-1} (\underline{x} - \underline{\hat{n}}) \leq 1 \right\} \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Gemäß Abb. 2.1 existieren vier verschiedene Konfigurationen der zwei Ellipsoide $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N}$. Besitzen die beiden Mengen gemeinsame Punkte, so kann eine (möglicherweise) eingeschränkte Beschreibung in Form der Schnittmenge der Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N}$ gefunden werden. Ist eine der beiden Mengen vollständig in der anderen enthalten, so ergibt sich als Fusionsergebnis einfach die kleinere der beiden Mengen, Abb. 2.1 a), c). Im allgemeinen ist die Schnittmenge zweier ellipsoidförmiger Mengen nun aber nicht wieder ein Ellipsoid, vgl. Abb. 2.1 b), es kann aber ein äußeres Hüllellipsoid für die Schnittmenge gefunden werden.

Die Behandlung des Falls der leeren Schnittmenge, Abb. 2.1 d), hängt von der Applikation ab. Häufig besitzt eines der Ellipsoide eine höhere Priorität und wird daher als Fusionsergebnis gewählt.

2.4.1 Hüllellipsoid für die Schnittmenge zweier Ellipsoide

Eine effiziente Methode zur Bestimmung einer äußeren Approximation der Schnittmenge $\mathcal{S}$ zweier Ellipsoide $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ durch ein Ellipsoid $\mathcal{B}$ ist die konvexe Kombination

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{x} : (0.5-\lambda)(\underline{x}-\underline{\hat{a}})^T \mathbf{A}^{-1} (\underline{x}-\underline{\hat{a}}) + (0.5+\lambda)(\underline{x}-\underline{\hat{n}})^T \mathbf{N}^{-1} (\underline{x}-\underline{\hat{n}}) \leq 1 \right\}, \tag{2.2}$$

mit $\lambda \in [-0.5, 0.5]$. Es handelt sich hier um eine Familie von Hüllellipsoiden, welche von dem Parameter λ abhängt, wobei offensichtlich

$$\mathcal{S} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{N}) \subset \mathcal{B} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$$

für alle zulässigen λ gilt. Das heißt, die einhüllende Menge $\mathcal{B}$ enthält die Schnittmenge $\mathcal{S}$ der Mengen $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ und ist selbst in der Vereinigungsmenge enthalten. Es werden also durch die äußere Approximation der Schnittmenge keine neuen Unsicherheiten hinzugefügt. Gleichung (2.2) läßt sich in die Normalform eines Ellipsoids bringen:

Satz 2.1 *Besitzen zwei Ellipsoide $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N}$ nach (2.1) gemeinsame Punkte, so ergibt sich als äußere Approximation für die Schnittmenge eine Familie von Hüllellipsoiden gegeben durch*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \left\{ \underline{x} : \left(\underline{x}-\underline{\hat{b}}\right)^T \mathbf{B}^{-1} \left(\underline{x}-\underline{\hat{b}}\right) \leq 1 \right\} \\
\underline{b} &= \mathbf{C}\,\underline{c}\,,\ \mathbf{B} = d\,\mathbf{C} \\
\underline{c} &= (0.5-\lambda)\mathbf{A}^{-1}\underline{\hat{a}} + (0.5+\lambda)\mathbf{N}^{-1}\underline{\hat{n}} \\
\mathbf{C} &= \left\{ (0.5-\lambda)\mathbf{A}^{-1} + (0.5+\lambda)\mathbf{N}^{-1} \right\}^{-1} \\
d &= 1 - \left(0.25-\lambda^2\right)(\underline{\hat{a}}-\underline{\hat{n}})^T \mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}(\underline{\hat{a}}-\underline{\hat{n}})
\end{aligned}$$

für $\lambda \in [-0.5, 0.5]$. [4)]

Beweis. Quadratische Ergänzung. □

Bevor der Satz 2.1 angewendet werden kann, muß jeweils geprüft werden, ob die beiden Ellipsoide $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N}$ gemeinsame Punkte besitzen, d.h. ob sie überlappen. Im nächsten Abschnitt wird dazu ein effizienter Überlappungstest vorgestellt.

[4)] λ wurde im Gegensatz zu [100] aus $[-0.5, 0.5]$ und nicht aus $[0, 1]$ gewählt, um in den folgenden Ausdrücken Symmetrien zu erhalten.

2.4.2 Effizienter Überlappungstest für zwei Ellipsoide

Zur Herleitung eines effizienten und einfachen Verfahrens zur Feststellung der Überlappung von zwei Ellipsoiden ist der folgende Satz hilfreich.

SATZ 2.2 *Für $d(\lambda)$ aus Satz 2.1 gelten folgende Aussagen, falls $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{N}$:*

1. $d(-0.5) = 1$, $d(0.5) = 1$.
2. *$d(\lambda)$ besitzt ein eindeutiges Minimum im Intervall* $[-0.5, 0.5]$.
3. *$d(\lambda)$ ist streng konvex im Intervall* $[-0.5, 0.5]$.
4. *Mit* $d_{min} = d\left(\lambda_{min}\right) = \min\limits_{-0.5 \le \lambda \le 0.5} d(\lambda)$ *gilt*

$$d_{min} \left\{ \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \right\} \iff \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{N} \left\{ \begin{matrix} \textit{besitzen gemeinsame Punkte} \\ \textit{besitzen keine gemeinsamen Punkte} \end{matrix} \right\} .$$

BEWEIS. Ein anschaulicher Beweis ist dadurch gegeben, daß das Hüllellipsoid $\mathcal{B}$ für kein $\lambda \in [-0.5, 0.5]$ negativ definit werden kann, falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N}$ gemeinsame Punkte aufweisen. Ein formaler Beweis findet sich in [95]. □

In [95] wird das Minimum von $d(\lambda)$ aus Satz 2.1 nun iterativ gesucht, was eine häufige Auswertung von $d(\lambda)$, und damit wiederholte Matrixinversionen, erforderlich macht. Ein weniger rechenaufwendiges Verfahren erhält man durch die analytische Minimierung von $d(\lambda)$. Hierzu wird zunächst das Matrizenpaar $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{N}^{-1}$ durch eine gemeinsame Transformation auf Diagonalgestalt gebracht, Anhang B.4. Es ergibt sich

$$\mathbf{T}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{I} \,,\; \mathbf{T}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{T} = \operatorname{diag}(\underline{\mu}) \,,\; \mathbf{T}^{-1}(\underline{\hat{a}} - \underline{\hat{n}}) = \underline{r} \;\; .$$

Mit Hilfe von Satz 2.2 kann nun ein Polynom angegeben werden, welches an der Stelle $\lambda_{\min}$ eine eindeutige Nullstelle aufweist.

Zur Vereinfachung der entstehenden Ausdrücke wird der Koeffizientenvektor

$$\underline{C} = [C_L, \ldots, C_0]^T$$

eines Polynoms, welches sich gemäß

$$C_L x^L + \ldots + C_0 = \left(A_M x^M + \ldots + A_0\right) \cdot \left(B_N x^N + \ldots + B_0\right)$$

als Produkt zweier Polynome ergibt, nicht als Faltung

$$\underline{C} = \underline{A} * \underline{B}$$

mit

$$\underline{A} = [A_M, \ldots, A_0]^T \,,\; \underline{B} = [B_N, \ldots, B_0]^T$$

geschrieben, sondern als Ergebnis einer Vektor–Matrix–Multiplikation dargestellt

$$\underline{C}^T = (\underline{A})^T \left(\operatorname{shift}_M(\underline{B})\right)^T \;\; .$$

Der shift–Operator ist dabei gemäß

$$\mathrm{shift}_M(\underline{*}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{*}(1) & 0 & 0 & \dots \\ \underline{*}(2) & \underline{*}(1) & 0 & \dots \\ \underline{*}(3) & \underline{*}(2) & \underline{*}(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}}_{M+1 \text{ Spalten}}$$

definiert.

SATZ 2.3 *Die Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N}$ nach (2.1) mit $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{N}$ besitzen gemeinsame Punkte, falls für $d(\lambda)$ aus Satz 2.1 gilt:*

$$d(\lambda_{min}) > 0 \ .$$

λ_{min} ergibt sich als die eindeutige Nullstelle eines Polynoms $2N$–ten Grades in $[-0.5, 0.5]$. Das Polynom ist gegeben durch

$$P^{(N)}(\lambda) = \left(\underline{P}^{(N)}\right)^T \cdot \left[\lambda^{2N},\, \lambda^{2N-1},\, \dots,\, \lambda,\, 1\right]^T \ .$$

Der Koeffizientenvektor $\underline{P}^{(N)}$ ergibt sich rekursiv aus

$$\left(\underline{P}^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} & \underline{W}^{(i)} & \\ r^2(i)\underline{\mu}(i) & \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}(i)\right) \\ -4\left(1+\underline{\mu}(i)\right) \\ \left(1-\underline{\mu}(i)\right) \end{bmatrix} & \end{bmatrix}^T \left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{P}^{(i-1)}\right),\, \mathrm{shift}_2\left(\underline{Q}^{(i-1)}\right)\right]^T$$

und

$$\left(\underline{Q}^{(i)}\right)^T = \left(\underline{W}^{(i)}\right)^T \left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{Q}^{(i-1)}\right)\right]^T$$

für $i = 1, \dots, N$ mit

$$\underline{W}^{(i)} = \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}(i)\right)^2 \\ -4\left(1-\underline{\mu}^2(i)\right) \\ \left(1+\underline{\mu}(i)\right)^2 \end{bmatrix}$$

und den Anfangswerten $\underline{P}^{(0)} = 0$, $\underline{Q}^{(0)} = 1$.

BEWEIS. Für $d(\lambda)$ erhält man

$$d(\lambda) = 1 - \left(0.25 - \lambda^2\right) \sum_{i=1}^{N} \frac{\underline{r}^2(i)\underline{\mu}(i)}{0.5 - \lambda + (0.5+\lambda)\underline{\mu}(i)} \ .$$

Differentiation nach λ ergibt

$$\frac{\partial d(\lambda)}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{N} \underline{r}^2(i)\underline{\mu}(i) \frac{(0.5-\lambda)^2 - (0.5+\lambda)^2\underline{\mu}(i)}{\{0.5 - \lambda + (0.5+\lambda)\underline{\mu}(i)\}^2} \ .$$

Zu Null setzen und erweitern ergibt das Polynom

$$P^{(N)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \Bigg\{ \underline{r}^2(i)\underline{\mu}(i) \left\{ 4\left\{1-\underline{\mu}(i)\right\}\lambda^2 - 4\left\{1+\underline{\mu}(i)\right\}\lambda + 1 - \underline{\mu}(i) \right\} \prod_{j=1, j\neq i}^{N} \left\{ 4\left\{1-\underline{\mu}(j)\right\}^2\lambda^2 - 4\left\{1-\underline{\mu}^2(j)\right\}\lambda + \left\{1+\underline{\mu}(j)\right\}^2 \right\} \Bigg\}$$

woraus durch Induktion der Satz folgt. □

Mit Hilfe der Rekursion kann der Koeffizientenvektor $\underline{P}^{(N)}$ nun symbolisch oder, was vor allem bei großen N sinnvoll ist, numerisch berechnet werden. Der Vorteil der gezeigten Vorgehensweise liegt darin, daß der größte Teil der Berechnungen unabhängig von λ ist. Die Bestimmung von $\lambda_{\min}$ ist damit der letzte Schritt und kann im einfachsten Fall z.B. durch Intervallschachtelung mit den Startwerten -0.5 und 0.5 durchgeführt werden. Damit wird $\lambda_{\min}$ bei vorgegebener Genauigkeit in einer festen Anzahl von Schritten ermittelt.

2.4.3 Minimalvolumiges Hüllellipsoid für die Schnittmenge

Überlappen sich nun die beiden Ellipsoide $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$, so kann der Parameter λ derart gewählt werden, daß ein gewisses Maß der „Größe“ des Hüllellipsoids $\mathcal{B}$ minimiert wird.

Satz 2.4 *Das Hüllellipsoid $\mathcal{B}$ in Satz 2.1 mit minimalem Volumen ergibt sich bei Wahl von $\lambda = \lambda_{opt}$. λ_{opt} erhält man aus der Untersuchung des Polynoms $(2N-1)$–ten Grades*

$$H^{(N)}(\lambda) = \left(\underline{H}^{(N)}(2:2N+1)\right)^T \cdot \left[\lambda^{2N-1},\, \lambda^{2N-2},\, \ldots,\, \lambda,\, 1\right]^T \quad .$$

Weisen $H^{(N)}(-0.5)$ und $H^{(N)}(0.5)$ gleiches Vorzeichen auf, so ergibt sich bei positivem Vorzeichen $\lambda_{opt} = 0.5$, sonst $\lambda_{opt} = -0.5$. Sind die Vorzeichen unterschiedlich, so ergibt sich λ_{opt} als die eindeutige Nullstelle von $H^{(N)}(\lambda)$ in $[-0.5, 0.5]$. Der Koeffizientenvektor $\underline{H}^{(N)}$ ergibt sich rekursiv aus

$$\left(\underline{H}^{(N)}\right)^T = [-N,\, 1]\left[\underline{P}^{(N)},\, \underline{R}^{(N)}\right]^T$$

$$\left(\underline{R}^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}(i)\right)^2 \\ -4\left(1-\underline{\mu}^2(i)\right) \\ \left(1+\underline{\mu}(i)\right)^2 \\ \left(1-\underline{\mu}(i)\right) \\ \underline{U}^{(i)} \\ \left(1-\underline{\mu}(i)\right)\underline{U}^{(i)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{R}^{(i-1)}\right)\right]^T \\ \left[\underline{S}^{(i)}\right]^T \\ \left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{T}^{(i)}\right)\right]^T \\ \left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{Q}^{(i-1)}\right)\right]^T \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{S}^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}(i-1)\right)\left(1-\underline{\mu}(i)\right) \\ -2\left\{\left(1-\underline{\mu}(i)\right)\left(1+\underline{\mu}(i-1)\right) + \left(1-\underline{\mu}(i-1)\right)\left(1+\underline{\mu}(i)\right)\right\} \\ \left(1+\underline{\mu}(i-1)\right)\left(1+\underline{\mu}(i)\right) \end{bmatrix}^T \left[\mathrm{shift}_2\left(\overline{\underline{S}}^{(i)}\right)\right]^T$$

$$\left(\underline{T}^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}(i-1)\right)\left(1-\underline{\mu}(i)\right) \\ -2\left\{\left(1-\underline{\mu}(i)\right)\left(1+\underline{\mu}(i-1)\right) + \left(1-\underline{\mu}(i-1)\right)\left(1+\underline{\mu}(i)\right)\right\} \\ \left(1+\underline{\mu}(i-1)\right)\left(1+\underline{\mu}(i)\right) \end{bmatrix}^T \left[\mathrm{shift}_2\left(\overline{\underline{T}}^{(i)}\right)\right]^T$$

für $i = 2, \ldots, N$ *mit*

$$\overline{\underline{S}}^{(i)} = \underline{S}^{(i-1)} + \left(\left(\underline{U}^{(i-1)} \right)^T \left[\text{shift}_2 \left(\underline{Q}^{(i-2)} \right) \right]^T \right)^T$$
$$\overline{\underline{T}}^{(i)} = \underline{T}^{(i-1)} + \left(1 - \underline{\mu}(i-1) \right) \underline{Q}^{(i-2)}$$

und

$$\underline{U}^{(i)} = \begin{bmatrix} 4\underline{r}^2(i)\underline{\mu}(i) \\ -\frac{4}{N}(1 - \underline{\mu}(i)) \\ \frac{2}{N}(1 + \underline{\mu}(i)) - \underline{r}^2(i)\underline{\mu}(i) \end{bmatrix} ,$$

für $i = 1, \ldots, N$. *Als Anfangswerte werden*

$$\underline{R}^{(1)} = \left(1 - \underline{\mu}(1) \right) \underline{U}^{(1)} , \; \underline{S}^{(1)} = 0 , \; \underline{T}^{(1)} = 0$$

verwendet. $\underline{P}$, $\underline{Q}$ *entnimmt man Satz 2.3.*

Beweis. Ein sinnvolles Maß der Größe des Hüllellipsoids ist das Volumen, welches proportional zu $\sqrt{\det(\mathbf{B})}$ ist. Mit Satz 2.1 gilt $\det(\mathbf{B}) = d^N \det(\mathbf{C})$. Falls das Matrizenpaar $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{N}^{-1}$ auf Diagonalgestalt transformiert wurde, gilt

$$\mathbf{C} = \text{diag} \left\{ \ldots, \frac{1}{0.5 - \lambda + (0.5 + \lambda)\underline{\mu}(i)}, \ldots \right\} .$$

Es ergibt sich

$$\frac{\partial \log(\det(\mathbf{B}))}{\partial \lambda} = \frac{N}{d} \frac{\partial d}{\partial \lambda} + \text{spur} \left\{ \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \lambda} \right\} . \tag{2.3}$$

Weiterhin gilt

$$\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \lambda} = \mathbf{C}^{-1} \left\{ -\mathbf{C} \left(\mathbf{N}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \right) \mathbf{C} \right\} = \left(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \right) \mathbf{C} ,$$

woraus

$$\text{spur} \left\{ \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \lambda} \right\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1 - \underline{\mu}(i)}{0.5 - \lambda + (0.5 + \lambda)\underline{\mu}(i)}$$

folgt. Durch Einsetzen in (2.3) ergibt sich

$$N \frac{\partial d}{\partial \lambda} + \left\{ 1 - \left(0.25 - \lambda^2 \right) \sum_{i=1}^{N} \frac{\underline{r}^2(i)\underline{\mu}(i)}{0.5 - \lambda + (0.5 + \lambda)\underline{\mu}(i)} \right\} \sum_{i=1}^{N} \frac{1 - \underline{\mu}(i)}{0.5 - \lambda + (0.5 + \lambda)\underline{\mu}(i)} .$$

Zu Null setzen und erweitern führt auf

$$\begin{aligned} H^{(N)}(\lambda) = & -N P^{(N)}(\lambda) \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\left\{ 4\underline{r}^2(i)\underline{\mu}(i)\lambda^2 - \frac{4}{N} \left(1 - \underline{\mu}(i) \right) \lambda + \frac{2}{N} \left(1 + \underline{\mu}(i) \right) - \underline{r}^2(i)\underline{\mu}(i) \right\} \right. \right. \\ & \qquad \left. \left. \prod_{j=1, j \neq i}^{N} \left\{ 1 + \underline{\mu}(j) - 2\lambda \left(1 - \underline{\mu}(j) \right) \right\} \right] \right\} \\ & \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\left\{ 1 - \underline{\mu}(i) \right\} \prod_{j=1, j \neq i}^{N} \left\{ 1 + \underline{\mu}(j) - 2\lambda \left(1 - \underline{\mu}(j) \right) \right\} \right] \right\} , \end{aligned}$$

woraus sich durch Induktion die rekursive Formulierung für den Koeffizientenvektor $\underline{H}^{(N)}$ ergibt. □

2.5 Zustandsschätzung für statische Systeme

Es wird nun ein Verfahren zur Lösung überbestimmter Gleichungssysteme für den Fall vorgestellt, daß der Gleichungsfehlervektor durch Amplitudengrenzen beschrieben wird. Gleichungssysteme mit diesen Eigenschaften treten z.B. bei der Sensordatenverarbeitung in Kapitel 4 auf.

2.5.1 Das Systemmodell

In diesem Abschnitt wird ein lineares, statisches System der Form

$$\underline{z} = \mathbf{H}\underline{x} + \underline{e} \tag{2.4}$$

betrachtet. $\underline{z} \in \mathcal{M}_{M,1}$ bezeichnet den Beobachtungsvektor, $\underline{x} \in \mathcal{M}_{N,1}$ den Zustandsvektor, $\mathbf{H} \in \mathcal{M}_{M,N}$ die Beobachtungsmatrix und $\underline{e} \in \mathcal{M}_{M,1}$ den Gleichungsfehlervektor. Der Zustand ist völlig unbekannt. Der Gleichungsfehlervektor $\underline{e}$ wird als unbekannt, aber amplitudenbegrenzt durch ein Ellipsoid gemäß

$$\underline{e} \in \mathcal{E}\,,\ \mathcal{E} = \left\{\underline{e} : \underline{e}^T\mathbf{E}^{-1}\underline{e} \leq 1\right\} \tag{2.5}$$

angenommen.

2.5.2 Menge aller Zustände definiert durch die Beobachtung

Das Ziel ist hier die einfache Berechnung der Menge aller Zustände, welche kompatibel mit den Amplitudengrenzen (2.5) sind. Dabei wird insbesondere der Fall betrachtet, daß die Anzahl der Zustände N kleiner oder gleich der Anzahl der Beobachtungen M ist und der Rang der Systemmatrix $\mathbf{H}$ gleich N ist.

Satz 2.5 *Für das Systemmodell (2.4) mit* $\operatorname{rang}(\mathbf{H}) = N$ *ergibt sich die Menge aller geschätzten Zustände, welche kompatibel mit den Amplitudengrenzen (2.5) sind, als*

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{X} &= \left\{\underline{x} : (\underline{x} - \underline{\hat{x}})^T\mathbf{X}^{-1}(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \leq 1\right\} \\
\underline{\hat{x}} &= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{E}^{-1}\underline{z} \\
\mathbf{X} &= d\,\left(\mathbf{H}^T\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1} \\
d &= 1 - (\underline{z} - \mathbf{H}\underline{\hat{x}})^T\mathbf{E}^{-1}(\underline{z} - \mathbf{H}\underline{\hat{x}})
\end{aligned}}$$

Beweis. Der Beweis ist in Anhang B.7.1 gegeben. □

Bei Betrachtung von Satz 2.5 könnte man zunächst befürchten, daß die Matrix $\mathbf{X}$ negativ definit werden könnte, falls d negativ wird. Diese Befürchtung wird durch den nächsten Satz ausgeräumt.

Satz 2.6 *Die Matrix* $\mathbf{X}$ *in Satz 2.5 ist positiv (semi–)definit, falls die Beobachtung* $\underline{z}$ *aus dem Systemmodell (2.4) stammt und die Amplitudengrenzen gemäß (2.5) eingehalten werden. Positive (Semi–)Definitheit der Matrix* $\mathbf{X}$ *ist äquivalent zu der Forderung nach einem nicht negativen* d *in Satz 2.5.*

Beweis. Der Beweis ist in Anhang B.7.2 gegeben. □

Dieser Satz hat in dieser Arbeit weitreichende Konsequenzen: Aus dem Vorzeichen von d kann abgelesen werden, ob der aktuelle Beobachtungsvektor kompatibel mit dem a priori angenommenen Systemmodell ist. Im nächsten Abschnitt wird diese Eigenschaft als Grundlage für einen mengenbasierten Hypothesentest verwendet.

2.5.3 Mengenbasierter Hypothesentest

In vielen Anwendungen möchte man für einen gegebenen Beobachtungsvektor $\underline{z}$ neben einer Schätzung für den Zustand auch noch eine Aussage darüber bekommen, ob die Beobachtung kompatibel mit dem Systemmodell ist. Man stellt in diesem Fall zwei Hypothesen auf, welche lauten

$$\begin{aligned} H_1: &\quad \underline{z} = \mathbf{H}\,\underline{x} + \underline{e}\,,\ \underline{e} \in \mathcal{E} \\ H_2: &\quad H_1 \text{ ist falsch } . \end{aligned}$$

Für das mengenbasierte Fehlermodell nach (2.5) ergibt sich d aus Satz 2.5 wegen Satz 2.6 als natürliche Entscheidungsfunktion:

$$\begin{aligned} &\text{Wähle } H_1, \text{ falls } d \geq 0 \\ &\text{Wähle } H_2, \text{ falls } d < 0 \ . \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen kann auf mehrere Systemmodelle erweitert werden. In dieser Arbeit werden jedoch maximal zwei Systemmodelle benötigt, vgl. Kapitel 4, so daß im folgenden nur noch dieser Fall betrachtet wird. Als Hypothesen ergeben sich

$$\begin{aligned} H_1: &\quad \underline{z} = \mathbf{H}_1\,\underline{x} + \underline{e}_1\,,\ \underline{e}_1 \in \mathcal{E}_1 \\ H_2: &\quad \underline{z} = \mathbf{H}_2\,\underline{x} + \underline{e}_2\,,\ \underline{e}_2 \in \mathcal{E}_2 \\ H_3: &\quad H_1, H_2 \text{ sind falsch } . \end{aligned}$$

Mit $\underline{e}_i \in \mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$ und $\mathcal{E}_i = \{\underline{e}_i : \underline{e}_i^T \mathbf{E}_i^{-1} \underline{e}_i \leq 1\}$ folgen als Entscheidungsfunktionen

$$d_i = 1 - (\underline{z} - \mathbf{H}_i \hat{\underline{x}}_i)^T \mathbf{E}_i^{-1} (\underline{z} - \mathbf{H}_i \hat{\underline{x}}_i)\ ,\ i = 1, 2\,,$$

und damit

$$\begin{aligned} &\text{Wähle } H_1, \text{ falls } d_1 \geq 0, d_1 \geq d_2 \\ &\text{Wähle } H_2, \text{ falls } d_2 \geq 0, d_2 > d_1 \\ &\text{Wähle } H_3, \text{ falls } d_1 < 0, d_2 < 0 \ . \end{aligned}$$

Für eine Anwendung dieser Zusammenhänge sei der Leser auf Abschnitt 4.2.6 verwiesen.

2.6 Zustandsschätzung für dynamische Systeme

Hier werden nun Algorithmen zur mengenbasierten Schätzung des Zustands eines dynamischen Systems hergeleitet. Dabei wird vor allem auch der Fall von MIMO–Systemen berücksichtigt. Die erforderlichen Rekursiongleichungen werden in einer Rückkopplungsform angegeben, wodurch zum einen die Inversion der Beobachtungsgleichung vermieden wird. Zum anderen hängt die Komplexität der Algorithmen damit von der Dimension des Beobachtungsvektors ab. Dieses Vorgehen ist also besonders dann sinnvoll, wenn die Dimension des Beobachtungsvektors kleiner als die Dimension des Zustandsvektors ist, was in Robotik–Applikationen häufig der Fall ist.

2.6.1 Das Systemmodell

Vorgelegt sei ein lineares System der Form

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \, \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \, \underline{u}_k \tag{2.6}$$

$$\underline{z}_k = \mathbf{H}_k \, \underline{x}_k + \underline{e}_k \ , \tag{2.7}$$

mit dem Zustandsvektor $\underline{x}_k \in \mathcal{M}_{N,1}$ und dem Beobachtungsvektor $\underline{z}_k \in \mathcal{M}_{M,1}$. Die auftretenden Unsicherheiten werden als amplitudenbegrenzt durch Ellipsoide gemäß $\underline{u}_k \in \mathcal{U}_k$, $\underline{e}_k \in \mathcal{E}_k$ mit

$$\mathcal{U}_k = \left\{ \underline{u}_k : (\underline{u}_k - \hat{\underline{u}}_k)^T \mathbf{U}_k^{-1} (\underline{u}_k - \hat{\underline{u}}_k) \leq 1 \right\} \ , \ \mathcal{E}_k = \left\{ \underline{e}_k : \underline{e}_k^T \mathbf{E}_k^{-1} \underline{e}_k \leq 1 \right\} \tag{2.8}$$

modelliert. Hierbei ist zu beachten, daß in der Systemgleichung (2.6) bewußt die nominale Eingangsgröße $\hat{u}_k$ mit den auftretenden additiven Unsicherheiten zur Menge $\mathcal{U}_k$ zusammengefaßt wird. Damit wird betont, daß im Rahmen der mengentheoretischen Interpretation die Größe $\hat{u}_k$ zwar den Mittelpunkt des Unsicherheitsellipsoids $\mathcal{U}_k$ darstellt, aber in keiner Weise bevorzugt gegenüber anderen Punkten innerhalb der Menge $\mathcal{U}_k$ behandelt wird. Weiterhin wird angenommen, daß für den Anfangszustand $\underline{x}_0$ gilt

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \underline{x}_0 : (\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0)^T \mathbf{X}_0^{-1} (\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0) \leq 1 \right\} \ .$$

Die Filterungsaufgabe besteht nun darin, zum Zeitpunkt k die Menge möglicher Systemzustände $\mathcal{X}_k$ basierend auf den Beobachtungen $\underline{z}_0, \underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_{k-1}, \underline{z}_k$ zu schätzen. Das Interesse gilt hier nicht einer Batchverarbeitung, sondern es soll zu jedem Zeitpunkt k ein aktueller Schätzwert $\mathcal{X}_k^S$ mit Hilfe eines rekursiven Verfahrens bereitgestellt werden. Die Gleichung (2.6) wird dabei benutzt, um ausgehend von einer Menge geschätzter Zustände zum Zeitpunkt $k-1$ die Menge möglicher Zustände zum Zeitpunkt k zu prädizieren, welche als $\mathcal{X}_k^P$ bezeichnet wird. Techniken zur effizienten Durchführung dieser Prädiktionsaufgabe im mengenbasierten Kontext sind der Inhalt von Abschnitt 2.6.2.

Zum Zeitpunkt k wird eine neue Beobachtung $\underline{z}_k$ gemacht, welche die Menge $\mathcal{X}_k^M$ aller Zustände definiert, welche mit der Beobachtung kompatibel sind. Es liegen also nun konkurrierende Informationen über den Systemzustand zum Zeitpunkt k in Form der zwei Mengen $\mathcal{X}_k^P$, $\mathcal{X}_k^M$ vor. Ein Verfahren zu deren Fusion wird in Abschnitt 2.6.3 vorgestellt.

2.6.2 Mengenbasierte Prädiktion des Systemzustands

Ausgehend von der Menge der möglichen Zustände zum Zeitpunkt $k-1$ kann über (2.6) die Menge der Zustände zum Zeitpunkt k prädiziert werden. Da die Menge der Ellipsoide unter affinen Transformationen geschlossen ist, vgl. Anhang B.2, kann die rechte Seite von (2.6) als MINKOWSKI–Summe von zwei Ellipsoiden betrachtet werden. Die Menge der Ellipsoide ist im allgemeinen unter Summationen nicht geschlossen, es kann aber ein Hüllellipsoid gefunden werden, welches die MINKOWSKI–Summe enthält. Mit Anhang B.5 findet man für dieses Hüllellipsoid

$$\mathcal{X}_k^P = \left\{ \underline{x}_k^P : \left(\underline{x}_k^P - \hat{\underline{x}}_k^P \right)^T \left(\mathbf{X}_k^P \right)^{-1} \left(\underline{x}_k^P - \hat{\underline{x}}_k^P \right) \leq 1 \right\} \ .$$

Der Mittelpunkt $\hat{\underline{x}}_k^P$ ergibt sich als die Summe der Mittelpunkte gemäß

$$\hat{\underline{x}}_k^P = \mathbf{A}_{k-1} \, \hat{\underline{x}}_{k-1}^S + \mathbf{B}_{k-1} \, \hat{\underline{u}}_{k-1}$$

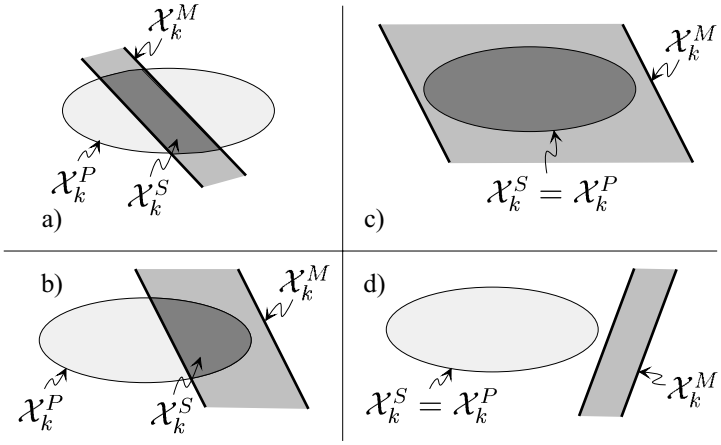


Abbildung 2.2: Die vier Konfigurationen für die relative Lage der Menge prädizierter Zustände $\mathcal{X}_k^P$ und der Menge der durch die Messung definierten Zustände $\mathcal{X}_k^M$ und die sich daraus ergebende Schnittmenge $\mathcal{X}_k^S$ (zweidimensionale Visualisierung).

und die Definitionsmatrix $\mathbf{X}_k^P$ ergibt sich als

$$\mathbf{X}_k^P = \frac{\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{X}_{k-1}^S\mathbf{A}_{k-1}^T}{0.5 - \kappa_k} + \frac{\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{U}_{k-1}\mathbf{B}_{k-1}^T}{0.5 + \kappa_k}\,,\ -0.5 < \kappa_k < 0.5\ .$$

Mit dem Verfahren aus Anhang B.5 wird κ_k so gewählt, daß das Volumen von $\mathcal{X}_k^P$ minimal wird.

2.6.3 Mengenbasierte Fusion von Prädiktion und Messung

Ein Vektor $\underline{z}_k$ von Beobachtungen zum Zeitpunkt k definiert eine Menge $\mathcal{X}_k^M$ von Zuständen, welche mit der Beobachtung kompatibel sind. Aus (2.7) folgt

$$\mathcal{X}_k^M = \left\{ \underline{x}_k^M : \underline{z}_k - \mathbf{H}_k\,\underline{x}_k^M \in \mathcal{E}_k \right\}\ .$$

Damit liegt neben der Menge prädizierter Zustände $\mathcal{X}_k^P$ eine weitere Information über den Systemzustand zum Zeitpunkt k in Form der Menge $\mathcal{X}_k^M$ vor, wobei die in der Abb. 2.2 dargestellten Konfigurationen möglich sind.

Für den Fall einer redundanten Messung, d.h. einer Messung, die nichts zur Reduktion der Unsicherheit in der Zustandsschätzung beiträgt, wird die Prädiktion als Schätzung übernommen. Es gilt also $\mathcal{X}_k^S = \mathcal{X}_k^P$, wie in der Abb. 2.2 c) dargestellt.

Auch für den Fall, daß Prädiktion und Messung inkonsistent sind, Abb. 2.2 d), wird keine Aktualisierung der Zustandsschätzung durchgeführt. Die Prädiktion wird als Schätzung übernommen, da sie die Information aus allen vorangegangenen Messungen enthält. Die aktuelle Messung wird damit verworfen.

Für die in Abb. 2.2 a), b) dargestellten Fälle besteht die Fusion konzeptionell in der Bestimmung der Schnittmenge, d.h.

$$\mathcal{X}_k^S = \mathcal{X}_k^P \cap \mathcal{X}_k^M\ .$$

Damit ist die mengenbasierte Fusion von Prädiktion und Messung ein nichtlineares Filter, welches durch eine selektive Aktualisierung der Zustandsschätzung inhärent die Fähigkeit

besitzt, redundante und falsche Messungen zu verwerfen. Die sprunghafte Nichtlinearität der selektiven Fusion kann aber bei Modellierungsfehlern zu Fusionsmengen mit zu kleinem Volumen und damit zur Divergenz führen. Es wird deshalb in Abschnitt 2.7 eine neue Methode zur Erhöhung der Robustheit von mengenbasierten Fusionsverfahren gegenüber Modellierungsfehlern vorgestellt.

Wird eine Aktualisierung der Zustandschätzung durch Bildung der Schnittmenge vorgenommen, so ist die Menge geschätzter Zustände $\mathcal{X}_k^S$ im allgemeinen kein Ellipsoid. Im folgenden Satz wird daher ein Hüllellipsoid für die Schnittmenge bestimmt.

SATZ 2.7 *Besitzen die beiden Mengen $\mathcal{X}_k^P$ und $\mathcal{X}_k^M$ gemeinsame Punkte, so ergibt sich als äußere Approximation für die Schnittmenge eine Familie von Hüllellipsoiden gegeben durch*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_k^S &= \left\{ \underline{x} : \left(\underline{x} - \underline{\hat{x}}_k^S\right)^T \left(\mathbf{X}_k^S\right)^{-1} \left(\underline{x} - \underline{\hat{x}}_k^S\right) \leq 1 \right\} \\
\underline{\hat{x}}_k^S &= \underline{\hat{x}}_k^P + \lambda_k \, \mathbf{C}_k \, \mathbf{H}_k^T \, \mathbf{E}_k^{-1} \, \underline{\epsilon}_k \\
\mathbf{X}_k^S &= d_k \mathbf{C}_k \\
\mathbf{C}_k &= \mathbf{X}_k^P - \lambda_k \, \mathbf{X}_k^P \, \mathbf{H}_k^T \left\{ \mathbf{E}_k + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^P \mathbf{H}_k^T \right\}^{-1} \mathbf{H}_k \, \mathbf{X}_k^P \\
d_k &= 1 + \lambda_k - \lambda_k \, \underline{\epsilon}_k^T \left\{ \mathbf{E}_k + \lambda_k \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^P \mathbf{H}_k^T \right\}^{-1} \underline{\epsilon}_k \\
\underline{\epsilon}_k &= \underline{z}_k - \mathbf{H}_k \underline{\hat{x}}_k^P
\end{aligned}
$$

für $\lambda_k \geq 0$.

BEWEIS. Umformung der Ergebnisse aus Satz 2.1 und Bilineartransformation mit $\lambda_k = \dfrac{0.5 + \lambda_k^*}{0.5 - \lambda_k^*}$, wobei $\lambda_k \in [0, \infty]$ und $\lambda_k^* \in [-0.5, 0.5]$. □

Effizienter Überlappungstest

Vor der Anwendung der Ergebnisse aus Satz 2.7 muß analog zum Vorgehen bei der Kombination von Zuständen zunächst überprüft werden, ob die Menge prädizierter Zustände $\mathcal{X}_k^P$ mit der durch die Messung definierten Menge $\mathcal{X}_k^M$ gemeinsame Punkte besitzt. Um die Herleitung eines Überlappungstests machbar zu gestalten, wird das Matrizenpaar $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^P \mathbf{H}_k^T$ durch eine gemeinsame Transformation auf Diagonalgestalt gebracht, so daß gilt

$$
\mathbf{T}_k^T \, \mathbf{E}_k \, \mathbf{T}_k = \mathbf{I} \, , \; \mathbf{T}_k^T \left(\mathbf{H}_k \, \mathbf{X}_k^P \, \mathbf{H}_k^T \right) \mathbf{T}_k = \operatorname{diag}(\underline{\mu}_k) \, , \; \mathbf{T}_k^T \underline{\epsilon}_k = \underline{r}_k \quad . \tag{2.9}
$$

Durch diese Vereinfachung kann analog zu Satz 2.3 der folgende Satz hergeleitet werden.

SATZ 2.8 *Die Menge der Zustände $\mathcal{X}_k^M$ definiert durch die Messung und die Menge $\mathcal{X}_k^P$ der prädizierten Zustände sind inkonsistent, d.h. besitzen keine gemeinsamen Punkte, falls*

$$
d_k(\lambda_{k,min}) < 0 \quad ,
$$

mit $\lambda_{k,min} = \dfrac{0.5 + \lambda_{k,min}^*}{0.5 - \lambda_{k,min}^*}$. $\lambda_{k,min}^*$ ist gegeben als die einzige Nullstelle eines Polynoms $2M$–ten Grades in $[-0.5, 0.5]$. Das Polynom ist gegeben durch

$$
P_k^{(M)}(\lambda_k^*) = \left(\underline{P}_k^{(M)}\right)^T \cdot \left[(\lambda_k^*)^{2M} \, , \, (\lambda_k^*)^{2M-1} \, , \, \ldots \, , \, \lambda_k^* , \, 1 \right]^T \quad .
$$

Der Koeffizientenvektor $\underline{P}_k^{(M)}$ *ergibt sich rekursiv aus*

$$\left(\underline{P}_k^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} \underline{W}_k^{(i)} \\ r_k^2(i) \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}_k(i)\right) \\ -4\left(1+\underline{\mu}_k(i)\right) \\ \left(1-\underline{\mu}_k(i)\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \left[\text{shift}_2\left(\underline{P}_k^{(i-1)}\right)\ ,\ \text{shift}_2\left(\underline{Q}_k^{(i-1)}\right)\right]^T$$

und

$$\left(\underline{Q}_k^{(i)}\right)^T = \left(\underline{W}_k^{(i)}\right)^T \left[\text{shift}_2\left(\underline{Q}_k^{(i-1)}\right)\right]^T$$

für $i = 1, \ldots, M$ *mit*

$$\underline{W}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}_k(i)\right)^2 \\ -4\left(1-\underline{\mu}_k^2(i)\right) \\ \left(1+\underline{\mu}_k(i)\right)^2 \end{bmatrix}$$

und den Anfangswerten $\underline{P}_k^{(0)} = 0\,,\ \underline{Q}_k^{(0)} = 1.$

Beweis. Aus Satz 2.7 ergibt sich

$$d_k^* = 1 - \left(0.25 - (\lambda_k^*)^2\right) \underline{\epsilon}_k^T \left\{(0.5-\lambda_k^*)\mathbf{E}_k + (0.5+\lambda_k^*)\mathbf{H}_k\mathbf{X}_k^P\mathbf{H}_k^T\right\}^{-1} \underline{\epsilon}_k\ . \tag{2.10}$$

Es wird bewußt der Bereich $\lambda_k^* \in [-0.5, 0.5]$ statt des in Satz 2.7 verwendeten Bereichs $\lambda_k \in [0, \infty]$ verwendet, damit die Nullstelle von $P_k^{(M)}(\lambda_k^*)$ in einem abgeschlossenen Intervall bestimmt werden kann. Einsetzen von (2.9) in (2.10) ergibt

$$d_k^*(\lambda_k^*) = 1 - \left(0.25 - (\lambda_k^*)^2\right) \sum_{i=1}^{M} \frac{\underline{r}_k^2(i)}{0.5 - \lambda_k^* + (0.5+\lambda_k^*)\underline{\mu}_k(i)}\ .$$

Differentiation nach λ_k^* führt auf

$$\frac{\partial d_k^*(\lambda_k^*)}{\partial \lambda_k^*} = -\sum_{i=1}^{M} \underline{r}_k^2(i) \frac{(0.5-\lambda_k^*)^2 - (0.5+\lambda_k^*)^2\underline{\mu}_k(i)}{\left\{0.5 - \lambda_k^* + (0.5+\lambda_k^*)\underline{\mu}_k(i)\right\}^2}\ .$$

Zu Null setzen und erweitern ergibt das Polynom

$$P^{(M)}(\lambda_k^*) = \sum_{i=1}^{M} \Bigg\{ \underline{r}_k^2(i) \left\{4\left(1-\underline{\mu}_k(i)\right)(\lambda_k^*)^2 - 4\left(1+\underline{\mu}_k(i)\right)\lambda_k^* + 1 - \underline{\mu}_k(i)\right\} \prod_{j=1, j\neq i}^{M} \left\{4\left(1-\underline{\mu}_k(j)\right)^2(\lambda_k^*)^2 - 4\left(1-\underline{\mu}_k^2(j)\right)\lambda_k^* + \left\{1+\underline{\mu}_k(j)\right\}^2\right\} \Bigg\}$$

Zur Überprüfung der Bedingung für Überlappung dient

$$d_k^*(\lambda_k^*) < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d_k(\lambda_k)}{1+\lambda_k} < 0\ .$$

Wegen $1 + \lambda_k > 0$ folgt der Satz. □

Minimalvolumiges Hüllellipsoid

SATZ 2.9 *Das Hüllellipsoid für die Schnittmenge der Mengen $\mathcal{X}_k^P$ und $\mathcal{X}_k^M$ in Satz 2.7 mit minimalem Volumen erhält man bei Wahl von $\lambda_{k,opt} = \dfrac{0.5 + \lambda_{k,opt}^*}{0.5 - \lambda_{k,opt}^*}$ aus der Untersuchung des Polynoms*

$$H_k^{(M)}(\lambda_k^*) = \left(\underline{H}_k^{(M)}(2:2M+2)\right)^T \cdot \left[(\lambda_k^*)^{2M}\,,\,(\lambda_k^*)^{2M-1}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_k^*,\,1\right]^T \quad .$$

Haben $H_k^{(M)}(-0.5)$ und $H_k^{(M)}(0.5)$ gleiches Vorzeichen, so ergibt sich $\lambda_{k,opt}^* = 0.5$ bei positivem Vorzeichen, sonst $\lambda_{k,opt}^* = -0.5$. Bei unterschiedlichen Vorzeichen ist $\lambda_{k,opt}^*$ die eindeutige Nullstelle von $H_k^{(M)}(\lambda_k^*)$ in $[-0.5, 0.5]$. Der Koeffizientenvektor $\underline{H}_k^{(M)}$ errechnet sich rekursiv aus

$$\left(\underline{H}_k^{(M)}\right)^T = \begin{bmatrix} 2M \\ -M \\ 1 \end{bmatrix}^T \left[\mathrm{shift}_1\left(\underline{P}_k^{(M)}\right)\,,\,\underline{R}_k^{(M)}\right]^T$$

$$\left(\underline{R}_k^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}_k(i)\right)^2 \\ -4\left(1-\underline{\mu}_k^2(i)\right) \\ \left(1+\underline{\mu}_k(i)\right)^2 \\ \underline{V}_k^{(i)} \\ \underline{U}_k^{(i)} \\ \left(\left(\underline{V}_k^{(i)}\right)^T\left(\mathrm{shift}_1\left(\underline{U}_k^{(i)}\right)\right)^T\right) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{R}_k^{(i-1)}\right)\right]^T \\ \left[\mathrm{shift}_1\left(\underline{S}_k^{(i)}\right)\right]^T \\ \left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{T}_k^{(i)}\right)\right]^T \\ \left[\mathrm{shift}_3\left(\underline{Q}_k^{(i-1)}\right)\right]^T \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{S}_k^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}_k(i-1)\right)\left(1-\underline{\mu}_k(i)\right) \\ -2\left\{\left(1-\underline{\mu}_k(i)\right)\left(1+\underline{\mu}_k(i-1)\right)+\left(1-\underline{\mu}_k(i-1)\right)\left(1+\underline{\mu}_k(i)\right)\right\} \\ \left(1+\underline{\mu}_k(i-1)\right)\left(1+\underline{\mu}_k(i)\right) \end{bmatrix}^T \left[\mathrm{shift}_2\left(\overline{\underline{S}}_k^{(i)}\right)\right]^T$$

$$\left(\underline{T}_k^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} 4\left(1-\underline{\mu}_k(i-1)\right)\left(1-\underline{\mu}_k(i)\right) \\ -2\left\{\left(1-\underline{\mu}_k(i)\right)\left(1+\underline{\mu}_k(i-1)\right)+\left(1-\underline{\mu}_k(i-1)\right)\left(1+\underline{\mu}_k(i)\right)\right\} \\ \left(1+\underline{\mu}_k(i-1)\right)\left(1+\underline{\mu}_k(i)\right) \end{bmatrix}^T \left[\mathrm{shift}_2\left(\overline{\underline{T}}_k^{(i)}\right)\right]^T$$

für $i = 2, \ldots, M$ mit

$$\overline{\underline{S}}_k^{(i)} = \underline{S}_k^{(i-1)} + \left(\left(\underline{U}_k^{(i-1)}\right)^T\left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{Q}_k^{(i-2)}\right)\right]^T\right)^T$$

$$\overline{\underline{T}}_k^{(i)} = \underline{T}_k^{(i-1)} + \left(\left(\underline{V}_k^{(i-1)}\right)^T\left[\mathrm{shift}_1\left(\underline{Q}_k^{(i-2)}\right)\right]^T\right)^T$$

und

$$\underline{U}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} 4\underline{r}_k^2(i) \\ -\frac{4}{M}(1-\underline{\mu}_k(i)) \\ \frac{2}{M}(1+\underline{\mu}_k(i)) - \underline{r}_k^2(i) \end{bmatrix}\,,\; \underline{V}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} -2\frac{N}{M}(1-\underline{\mu}_k(i)) \\ \frac{N-M}{M}(1+\underline{\mu}_k(i)) + 1 - \underline{\mu}_k(i) \end{bmatrix}$$

für $i = 1, \ldots, M$. Als Anfangswerte dienen

$$\left(\underline{R}_k^{(1)}\right)^T = \left(\underline{V}_k^{(1)}\right)^T\left[\mathrm{shift}_1\left(\underline{U}_k^{(1)}\right)\right]^T\,,\; \underline{S}_k^{(1)} = 0\,,\; \underline{T}_k^{(1)} = 0 \quad .$$

$\underline{P}$, $\underline{Q}$ erhält man aus Satz 2.8.

BEWEIS. Aus Satz 2.7 entnimmt man

$$\mathcal{X}_k^S = d_k^* \left\{ \left(\frac{\mathbf{X}_k^P}{0.5 - \lambda_k^*} \right)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \left(\frac{\mathbf{E}_k}{0.5 + \lambda_k^*} \right)^{-1} \mathbf{H}_k \right\}^{-1} .$$

Wegen $\det(\mathbf{A} + \mathbf{BDC}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D}) \det(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})$ [108] ergibt sich

$$\det\left(\mathcal{X}_k^S\right) \sim \left(\frac{d_k^*}{0.5 - \lambda_k^*} \right)^N \left\{ \det\left(\mathbf{E}_k + \frac{0.5 + \lambda_k^*}{0.5 - \lambda_k^*} \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k^P \mathbf{H}_k^T \right) \right\}^{-1} = \frac{(d_k^*)^N}{(0.5 - \lambda_k^*)^{N-M}} \frac{1}{\det(\mathbf{D}_k)}$$

mit

$$\mathbf{D}_k = (0.5 - \lambda_k^*)\mathbf{E}_k + (0.5 + \lambda_k^*)\mathbf{H}_k \, \mathbf{X}_k^P \mathbf{H}_k^T \ .$$

Logarithmieren, differenzieren nach λ_k^* und zu Null setzen ergibt

$$N(0.5 - \lambda_k^*) \frac{\partial d_k}{\partial \lambda_k^*} + d_k^* \left\{ N - M - (0.5 - \lambda_k^*) \operatorname{spur}\left(\mathbf{D}_k^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial \lambda_k^*} \right) \right\} = 0 \ .$$

Mit

$$\operatorname{spur}\left(\mathbf{D}_k^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}_k}{\partial \lambda_k^*} \right) = -\sum_{i=1}^{M} \frac{1 - \underline{\mu}_k(i)}{0.5 - \lambda_k^* + (0.5 + \lambda_k^*)\underline{\mu}_k(i)}$$

und d_k^*, $\frac{\partial d_k^*(\lambda_k^*)}{\partial \lambda_k^*}$, $\underline{P}_k^{(M)}$ aus Satz 2.8 ergibt sich das Polynom

$$\begin{aligned} H_k^{(M)}(\lambda_k) = {} & N(2\lambda_k - 1) P_k^{(M)}(\lambda_k) \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^{M} \left[\left\{ 4\underline{r}_k^2(i)\lambda_k^2 - \frac{4}{M}\left(1 - \underline{\mu}_k(i)\right)\lambda_k + \frac{2}{M}\left(1 + \underline{\mu}_k(i)\right) - \underline{r}_k^2(i) \right\} \right. \right. \\ & \qquad \left. \left. \prod_{j=1, j\neq i}^{M} \left\{ 1 + \underline{\mu}_k(j) - 2\lambda_k \left(1 - \underline{\mu}_k(j)\right) \right\} \right] \right\} \\ & \left\{ \sum_{i=1}^{M} \left[\left\{ -2\frac{N}{M}\left(1 - \underline{\mu}_k(i)\right)\lambda_k + \frac{N - M}{M}\left(1 + \underline{\mu}_k(i)\right) + 1 - \underline{\mu}_k(i) \right\} \right. \right. \\ & \qquad \left. \left. \prod_{j=1, j\neq i}^{M} \left\{ 1 + \underline{\mu}_k(j) - 2\lambda_k \left(1 - \underline{\mu}_k(j)\right) \right\} \right] \right\} \ , \end{aligned}$$

woraus nach einigen Manipulationen die gesuchten Rekursionsgleichungen folgen. □

2.6.4 Spezialfall: Skalare Messung

Die Komplexität der Algorithmen im vorhergehenden Abschnitt hängt vor allem von der Dimension M des Beobachtungsvektors ab. Für den speziellen Fall einer eindimensionalen Beobachtung, d.h.

$$\mathcal{X}_k^M = \left\{ \underline{x}_k^M : z_k = \underline{H}_k^T \, \underline{x}_k^M + e_k \, , \ e_k^2 \leq E_k \right\} \ ,$$

vereinfachen sich die dargestellten Algorithmen weiter.

SATZ 2.10 *Besitzen die Menge $\mathcal{X}_k^P$ prädizierter Zustände und die durch eine eindimensionale Beobachtung definierte Menge $\mathcal{X}_k^M$ gemeinsame Punkte, so ergibt sich als äußere Approximation für die Schnittmenge eine Familie von Hüllellipsoiden gemäß*

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{X}_k^S &= \left\{ \underline{x}_k^S : \left(\underline{x}_k^S - \underline{\hat{x}}_k^S\right) \left(\mathbf{X}_k^S\right)^{-1} \left(\underline{x}_k^S - \underline{\hat{x}}_k^S\right)^T \leq 1 \right\} \\
\underline{\hat{x}}_k^S &= \underline{\hat{x}}_k^P + \lambda_k \, \mathbf{C}_k \, \underline{H}_k \, E_k^{-1} \, \epsilon_k, \;\; \mathbf{X}_k^S = d_k \, \mathbf{C}_k \\
\mathbf{C}_k &= \mathbf{X}_k^P - \lambda_k \, \frac{\mathbf{X}_k^P \, \underline{H}_k \, \underline{H}_k^T \, \mathbf{X}_k^P}{E_k + \lambda_k \, G_k} \\
d_k &= 1 + \lambda_k - \frac{\lambda_k \, \epsilon_k^2}{E_k + \lambda_k \, G_k} \\
\epsilon_k &= z_k - \underline{H}_k^T \, \underline{\hat{x}}_k^P \;, \; G_k = \underline{H}_k^T \, \mathbf{X}_k^P \, \underline{H}_k
\end{aligned}}$$

für $\lambda_k \in [0, \infty]$.

BEWEIS. Entweder durch Einsetzen in Satz 2.7 oder durch Verallgemeinerung der Zusammenhänge in [98]. □

Überlappungstest

Die Überlappung der beiden Mengen $\mathbf{X}_k^P$, $\mathbf{X}_k^M$ wird durch die Bedingung

$$d_k(\lambda_{k,\min}) \geq 0 \;\; , \quad \text{mit } \lambda_{k,\min} = \sqrt{\frac{E_k}{G_k}} \;\; .$$

überprüft.

Minimalvolumiges Hüllellipsoid

Ist der Überlappungstest erfolgreich, d.h. weisen die beiden Mengen $\mathbf{X}_k^P$ und $\mathbf{X}_k^M$ gemeinsame Punkte auf, so wird das Volumen des Hüllellipsoids $\mathbf{X}_k^S$ in Satz 2.10 durch die Wahl von $\lambda_k = \lambda_{k,\text{opt}}$ minimiert. $\lambda_{k,\text{opt}}$ ergibt sich als die größte Nullstelle der quadratischen Gleichung [98]

$$\boxed{\begin{aligned}
&\lambda_k^2 (N-1) G_k^2 \\
&\quad + \lambda_k \left\{ \epsilon_k^2 + (2N-1) E_k - G_k \right\} G_k \\
&\quad + \left\{ N \left(E_k - \epsilon_k^2 \right) - G_k \right\} E_k = 0
\end{aligned}}$$

wobei N die Dimension des Zustandsvektors ist. Wird durch eine Messung die Unsicherheit nicht reduziert, vgl. Abb. 2.2 d), ergibt sich $\lambda_{k,\text{opt}} \leq 0$. Es wird dann $\lambda_{k,\text{opt}} = 0$ gewählt.

BEMERKUNG 2.1 Die Bezeichnung „minimalvolumiges Hüllellipsoid“ wurde im vorangegangenen Text jeweils als Synonym für dasjenige Ellipsoid gebraucht, das als konvexe Kombination der Ursprungsmengen minimales Volumen erreicht. Dieses muß aber selbstverständlich nicht das kleinste Volumen unter allen möglichen Ellipsoiden aufweisen, die nicht dieser Einschränkung unterliegen.

Im Fall einer skalaren Beobachtung erhält man das Hüllellipsoid mit kleinstmöglichem Volumen aus Satz 2.10 nur für den Fall, daß beide Hyperebenen das Ellipsoid schneiden, vergleiche Abb. 2.2 a). Für den Fall, daß eine der Hyperebenen außerhalb liegt, enthält die Familie der Hüllellipsoide aus Satz 2.10 das Ellipsoid mit kleinstmöglichem Volumen *nicht*. Dieses erhält man aber, indem man zunächst die außerhalb liegende Hyperebene durch eine parallele Ebene ersetzt, die tangential zu $\mathcal{X}_k^P$ liegt und dann die Fusion durchführt [81].

Hüllellipsoid mit minimalvolumiger Projektion auf beliebigen Unterraum

In vielen Applikationen ist es natürlicher, statt des minimalen Volumens des Hüllellipsoids, das minimale Volumen der Projektion des Hüllellipsoids auf einen bestimmten Unterraum zu fordern. Dies ist zum Beispiel in Abschnitt 3.5 bei der Fusion von Winkelmessungen der Fall.

Der nächste Satz erlaubt die Berechnung des optimalen Wertes für den Fusionsparameter λ_k, falls das minimale Volumen der Projektion des Hüllellipsoids auf einen beliebigen Unterraum gesucht ist.

SATZ 2.11 *Das Hüllellipsoid nach Satz 2.10 mit einem minimalem Volumen der Projektion auf einen beliebigen Unterraum ergibt sich bei Wahl von λ_k als positive, reelle Nullstelle von*

$$\begin{aligned}
&\lambda_k^3(G_k - K_k)G_k^2 L \\
&\quad + \lambda_k^2\{L(3G_k - 2K_k) - K_k\}E_k G_k \\
&\quad + \lambda_k\left\{\epsilon_k^2(L(K_k - G_k) + K_k) + E_k(L(3G_k - K_k) - K_k) - G_k K_k\right\}E_k \\
&\quad + \left\{L\left(E_k - \epsilon_k^2\right) - K_k\right\}E_k^2 = 0
\end{aligned}$$

wobei L die Dimension des Unterraums ist und K_k durch

$$K_k = \underline{H}_k^T \left(\bar{\mathbf{X}}_k^P\right)^T \left(\mathrm{proj}(\mathbf{X}_k^P)\right)^{-1} \bar{\mathbf{X}}_k^P \underline{H}_k$$

gegeben ist. $\bar{\mathbf{X}}_k^P$ erhält man aus $\mathbf{X}_k^P$ durch Streichen derjenigen Zeilen, welche nicht dem betrachteten Unterraum zugeordnet werden können.

BEWEIS. Die Projektion proj $\left(\mathbf{X}_k^S\right)$ von $\mathbf{X}_k^S$ auf den betrachteten Unterraum ergibt sich zu

$$d_k \,\mathrm{proj}\left(\mathbf{X}_k^P\right) - \lambda_k d_k \frac{\mathrm{proj}\left(\mathbf{X}_k^P \underline{H}_k \underline{H}_k^T \mathbf{X}_k^P\right)}{E_k + \lambda_k G_k} \quad .$$

Das Volumen von proj $\left(\mathbf{X}_k^S\right)$ ist proportional zu

$$\det\left(d_k \mathbf{I} - \lambda_k d_k \frac{\left(\mathrm{proj}(\mathbf{X}_k^P)\right)^{-1} \bar{\mathbf{X}}_k^P \underline{H}_k \underline{H}_k^T \left(\bar{\mathbf{X}}_k^P\right)^T}{E_k + \lambda_k G_k}\right) \quad .$$

Durch Verwendung der Identität [86]

$$\det\left(c\mathbf{I}+\underline{y}\underline{z}^T\right)=c^{L-1}\left(c+\underline{y}^T\underline{z}\right)\quad,$$

mit der Unterraumdimension L wird aus (2.11)

$$d_k^L\frac{E_k+\lambda_k(G_k-K_k)}{E_k+\lambda_k G_k}\quad.$$

Differentiation nach λ_k und zu Null setzen ergibt den Satz. □

2.7 Robuste Zustandsschätzung

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Schwäche der mengenbasierten Fusion diskutiert, welche den Hauptangriffspunkt dieser Verfahren darstellt, und dann eine neue Methode zu deren Abhilfe dargestellt.

2.7.1 Schwächen der vorgestellten Zustandsschätzer

Die bisher vorgestellten Verfahren arbeiten zufriedenstellend, solange die Modellierung des betrachteten Systems ausreichend genau ist. Modellierungsfehler können aber zu Lösungsmengen mit einem extrem kleinen Volumen führen. Ist der tatsächliche Zustand dann nicht mehr in der Lösungsmenge enthalten, kann dies zur Divergenz führen. Der Grund für diese Empfindlichkeit gegenüber Modellierungsfehlern ist in der sprunghaften Nichtlinearität der selektiven Fusion zu suchen: Überlappen die zu fusionierenden Mengen, so wird das Hüllellipsoid mit „minimaler Größe“ zur Approximation der Schnittmenge verwendet. Weisen die beiden Mengen keine gemeinsamen Punkte auf, so wird diejenige Menge beibehalten, welche die Information aus allen vorhergehenden Fusionen repräsentiert. Im Grenzfall kann diese Art der Fusion also zu Lösungsmengen mit zu kleinem Volumen führen.

2.7.2 Erhöhung der Robustheit durch Konsistenzmaße

Die Empfindlichkeit mengenbasierter Zustandsschätzer gegenüber Ausreißern, welche nicht den Amplitudengrenzen gehorchen, soll hier beseitigt werden. Derartige Ausreißer können zum Beispiel von vernachlässigten stochastischen Störungen stammen. Es ist nun nicht praktikabel, die Amplitudengrenzen derart konservativ zu wählen, daß Ausreißer diese Grenzen niemals überschreiten. Vielmehr wird im folgenden die Idee der selektiven Fusion um die Idee der abgeschwächten Fusion bei geringer Konsistenz erweitert. Der Fusionsparameter λ wird dabei so gewählt, daß das Hüllellipsoid für die Schnittmenge mit fallender Konsistenz der beiden ursprünglichen Mengen eine steigende Tendenz in Richtung der höher priorisierten Menge aufweist. Die Umsetzung dieser Idee ist für die hier gewählte Art der Fusion durch konvexe Kombination besonders elegant möglich.

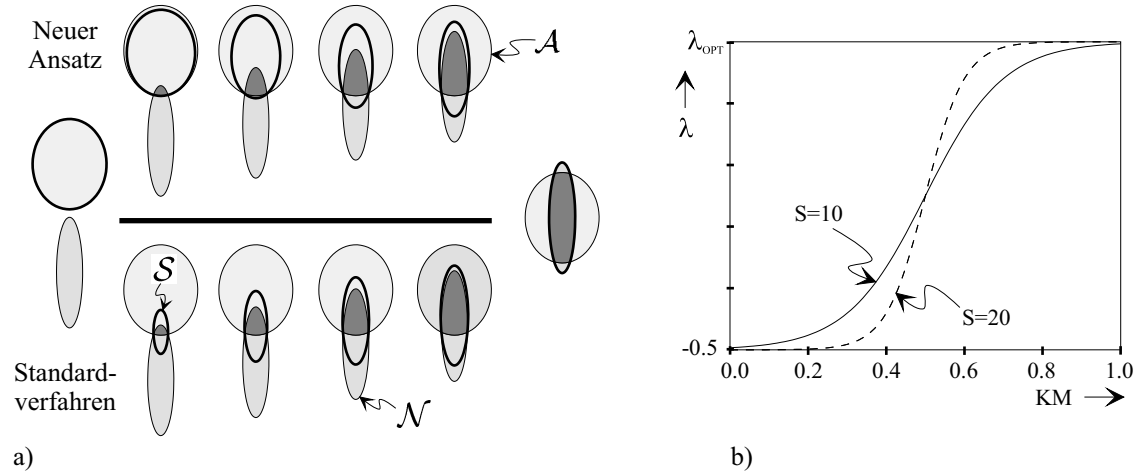


Abbildung 2.3: a) Vergleich des neuen Ansatzes mit dem Standardverfahren für verschiedene Konfigurationen von zwei Ellipsoiden $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N}$. b) Wahl des Fusionsparameters λ in Abhängigkeit vom Konsistenzmaß KM gemäß (2.11) für $S = 10 \ldots 20$ und $V = 0.5$.

Robuste Kombination von Zustandsschätzungen

Im Falle der Kombination von Zustandsschätzungen gemäß Abschnitt 2.4 erhält man ein sinnvolles Maß für die Konsistenz zweier Mengen als das Verhältnis des (exakten) Volumens der Schnittmenge zum geometrischen Mittel der Volumina der einzelnen Mengen

$$\mathrm{KM}(\mathcal{A},\mathcal{N}) = \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{A}\cap\mathcal{N})}{\sqrt{\mathrm{Vol}(\mathcal{A})\mathrm{Vol}(\mathcal{N})}} \ ,$$

mit $0 \leq \mathrm{KM} \leq 1$. Zur Vereinfachung wird hier das Volumen des minimalvolumigen Hüllellipsoids zur Approximation von $\mathrm{Vol}(\mathcal{A}\cap\mathcal{N})$ verwendet. Die Einstellung des Fusionsparameters λ geschieht nun nach den folgenden Überlegungen, wobei o.B.d.A. angenommen wird, daß die Menge $\mathcal{A}$ eine höhere Priorität besitzt.

- ◇ Sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ stark konsistent, d.h. $\mathrm{KM} \approx 0.9 \ldots 1.0$, so wird λ_{opt} zur Fusion verwendet.
- ◇ Bei schwacher Konsistenz von $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$, d.h. $\mathrm{KM} \approx 0.0 \ldots 0.1$, wird $\lambda = -0.5$ verwendet, was gleichbedeutend mit $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ ist.
- ◇ Für eine mittlere Konsistenz der Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N}$, d.h. $\mathrm{KM} \approx 0.1 \ldots 0.9$ soll λ zwischen den Extremwerten interpoliert werden.

Die oben genannten Forderungen werden sehr gut von der verallgemeinerten Logistikfunktion

$$\lambda = (\lambda_{opt} + 0.5)/[1 + \exp(-S(\mathrm{KM} - V))] - 0.5 \ , \tag{2.11}$$

erfüllt, welche für $S = 10$ und 20 und $V = 0.5$ in der Abb. 2.3 b) dargestellt ist.

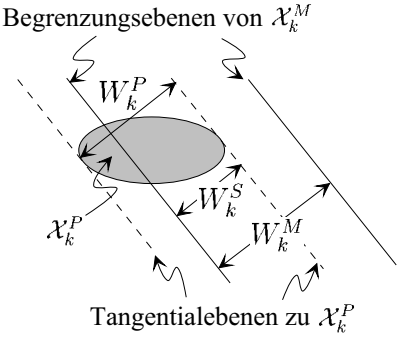


Abbildung 2.4: Bestimmung des Konsistenzmaßes KM_k für ein dynamisches System im speziellen Fall einer skalaren Beobachtung.

Robuste Zustandsschätzung für dynamische Systeme

Es wird nun die robuste Zustandsschätzung für dynamische Systeme für den Fall betrachtet, daß die Dimension M des Beobachtungsvektors $\underline{z}_k$ *kleiner* als die Dimension N des Zustandsvektors $\underline{x}_k$ ist. In diesem Fall ist das Volumen der durch die Messung gegebenen Menge der Roboterlagen $\mathcal{X}_k^M$ nicht definiert, da $\mathcal{X}_k^M$ nun ein degeneriertes Ellipsoid darstellt. Statt der Volumina werden nun die Volumina der Projektionen der Mengen auf diejenige Ebene betrachtet, welche durch die nicht degenerierten Achsen von $\mathcal{X}_k^M$ festgelegt ist. Bezeichnet man die Projektion einer Menge $\mathcal{M}$ auf diese Ebene als $\mathrm{proj}(\mathcal{M})$, so ergibt sich das Konsistenzmaß zu

$$\mathrm{KM}_k\left(\mathcal{X}_k^P, \mathcal{X}_k^M\right) = \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathrm{proj}\left(\mathcal{X}_k^P \cap \mathcal{X}_k^M\right)\right)}{\sqrt{\mathrm{Vol}(\mathrm{proj}(\mathcal{X}_k^P))\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_k)}} \ .$$

Zur Vereinfachung wird wieder das Volumen der Projektion des minimalvolumigen Hüllellipsoids zur Approximation des Volumens der exakten Schnittmenge verwendet. Das für die Fusion benutzte λ_k ergibt sich dann aus

$$\lambda_k = \lambda_k^{opt}/[1 + \exp(-S(\mathrm{KM}_k - V))] \ .$$

Spezialfall: Skalare Messung. Für den Spezialfall der Zustandsschätzung für ein dynamisches System aus skalaren Beobachtungen nach Abschnitt 2.6.4 läßt sich das Konsistenzmaß sehr einfach gemäß Abb. 2.4 exakt berechnen:

$$\mathrm{KM}_k\left(\mathcal{X}_k^P, \mathcal{X}_k^M\right) = \frac{W_k^S}{\sqrt{W_k^P\, W_k^M}} \ .$$

Bemerkung 2.2 Es ist zu betonen, daß das vorgestellte Fusionsverfahren, welches für geringe Konsistenz der Ausgangsmengen zu einer abgeschwächten Fusion führt, den Einfluß einzelner Ausreißer reduziert. Sind Messungen und Prädiktion tatsächlich nur schwach konsistent, so wird das minimale Hüllellipsoid nach einigen Zeitschritten erreicht.

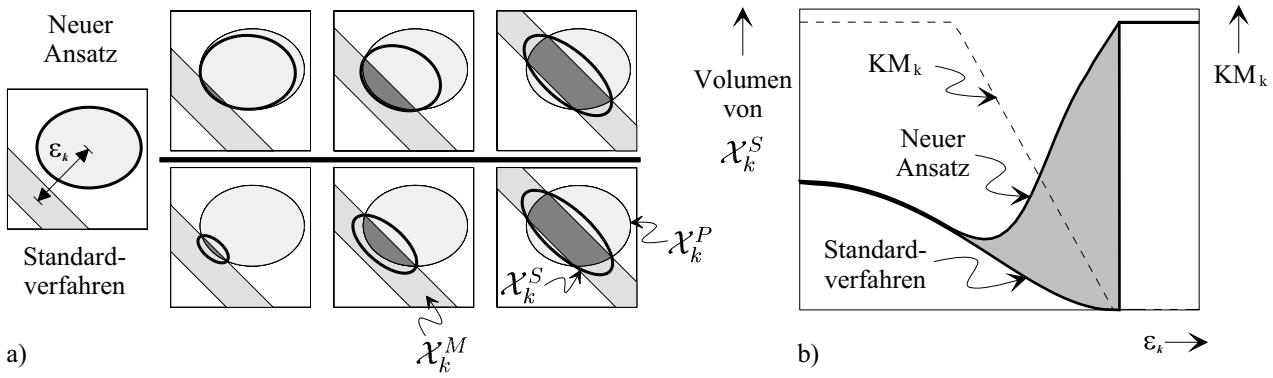


Abbildung 2.5: a) Vergleich des neuen Ansatzes mit dem Standardverfahren für verschiedene Konfigurationen von $\mathcal{X}_k^P$ und $\mathcal{X}_k^M$. b) Volumen der Menge geschätzter Zustände $\mathcal{X}_k^S$ aus a) für das Standardverfahren und den neuen Ansatz.

Wesentliche Ergebnisse des Kapitels

Es wurde ein einheitlicher Formalismus für den Entwurf und die Implementierung *nichtlinearer* Zustandsschätzer auf der Basis mengentheoretischer Verfahren vorgestellt. Diese Schätzer kommen ohne ungerechtfertigte Unabhängigkeitsannahmen aus und sind somit eine Alternative zu statistischen Methoden, wenn korrelierte oder systematische Unsicherheiten vorliegen, oder wenn ein statistisches Fehlermodell zu komplex oder nicht verfügbar ist. Alle zur mengenbasierten, dezentralen Zustandsschätzung notwendigen Algorithmen wurden in diesem Kapitel hergeleitet, wobei ellipsoidförmige Mengen vorausgesetzt wurden. Die benötigten mathematischen Zusammenhänge wurden mit einer aus der Literatur bisher nicht bekannten Vollständigkeit und Einfachheit dargestellt. Dabei auftretende Optimierungsprobleme konnten sämtlich auf die Suche der einzigen Nullstelle eines Polynoms im Intervall $[-0.5, 0.5]$ zurückgeführt werden, wobei sich geschlossene Ausdrücke für die Koeffizienten des Polynoms ergeben. Die Algorithmen sind in Vektor–Matrix–Notation dargestellt und für eine Rechnerimplementierung gut geeignet. Damit könnten die bisher etwas unhandlichen mengenbasierten Verfahren eine größere Verbreitung erlangen.

Die mangelnde Robustheit mengenbasierter Zustandschätzer gegenüber unmodellierten Meßausreißern, der Hauptangriffspunkt mengenbasierter Verfahren, konnte durch die Einführung von Konsistenzmaßen ausgeräumt werden.

Kapitel 3

Modellbasierte Lokalisierung eines mobilen Roboters

Einleitung

Dieses Kapitel beschreibt ein Verfahren zur Schätzung der Position x, y und der Orientierung ψ eines in der Ebene beweglichen Roboters bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems. Position und Orientierung werden zusammenfassend als Lage $\underline{x} = [x, y, \psi]^T$ bezeichnet, das raumfeste Koordinatensystem wird Welt– oder Inertialkoordinatensystem genannt. Der mobile Roboter befindet sich in einer Innenraumumgebung, welche neben beweglichen Objekten wie Menschen, anderen Robotern und beweglichem Mobiliar auch ortsfeste Strukturen wie Wände und Türen enthält. Diese ortsfesten Strukturen dienen als natürliche Landmarken zur Bestimmung der Lage des Roboters und werden zusätzlich durch künstliche, passive Landmarken ergänzt.

Es wird sowohl die anfängliche Initialisierung als auch die schritthaltende Lokalisierung des Roboters in der Bewegung betrachtet. Dabei dienen interne Sensoren zur Messung des zurückgelegten Weges sowie der Orientierungsänderung und damit der inkrementellen Fortschreibung einer bekannten Anfangslage. Zur Stützung dieser Lageschätzung werden verschiedene bordeigene Geometriesensoren verwendet, die bei der Vermessung von Umweltmerkmalen nach unterschiedlichen physikalischen Prinzipien arbeiten. Für zwei Typen von Geometriesensoren, die sich durch einen einfachen Aufbau und einen niedrigen Preis auszeichnen, werden in dieser Arbeit exemplarisch Lokalisierungsalgorithmen hergeleitet. Dabei handelt es sich um

- ein rotierendes **Winkelmeßsystem**, welches die Winkel zu künstlichen, passiven Landmarken bezüglich des Roboterkoordinatensystems bestimmt, und
- ein **Distanzsensor–Array** aus mehreren akustischen Signalquellen und Mikrophonen, welche außen am Roboter auf einheitlicher Höhe befestigt sind.

Bei der Verwendung mehrerer Geometriesensoren ist im Vergleich zu der Verwendung eines einzelnen Sensors eine größere Anzahl von Umweltmerkmalen zur Lokalisierung nutzbar, wodurch nicht nur der Arbeitsbereich erweitert wird, sondern auch die Präzision der Lageschätzung steigt. Auf diesen Punkt wird später noch detaillierter eingegangen. Auf der anderen Seite verkompliziert sich die Sensordatenfusion, da die Lage aus unterschiedlichen, konkurrierenden Umweltinformationen geschätzt werden muß. Außerdem unterliegen die Daten der beiden betrachteten Typen von Geometriesensoren nicht nur stochastischen Störungen, sondern auch systematischen Unsicherheiten, was im Rahmen der Sensordatenfusion berücksichtigt werden sollte.

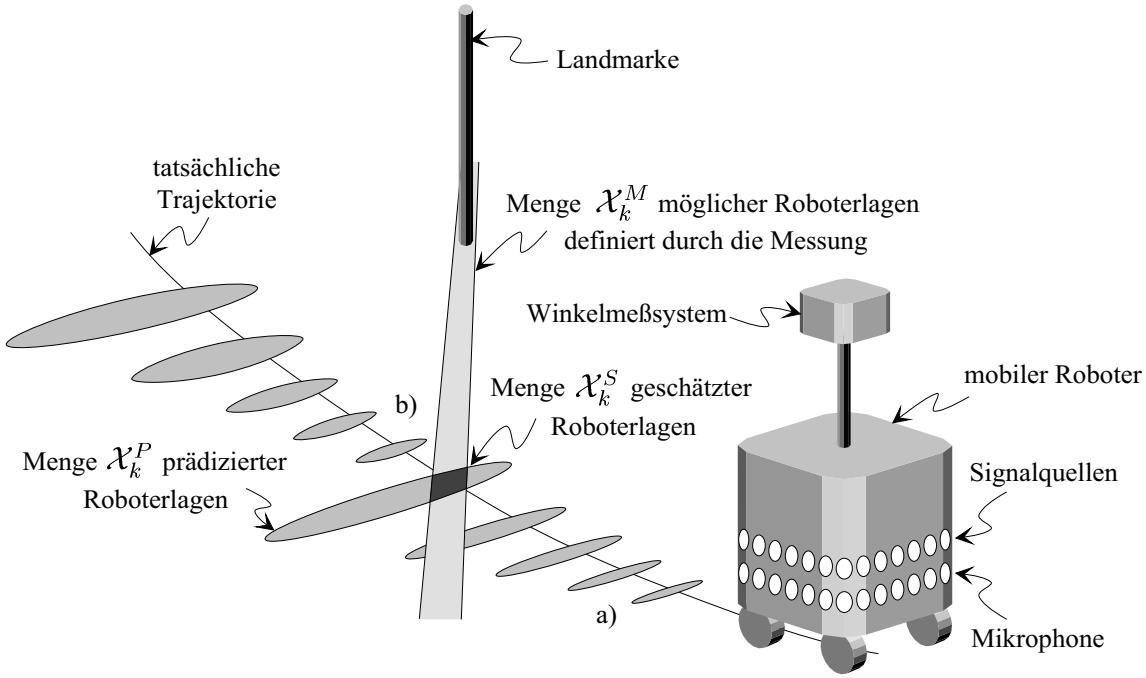


Abbildung 3.1: Anschauliche Darstellung des Verfahrens zur Lokalisierung eines mobilen Roboters. a) Die inkrementelle Lageschätzung mittels Koppelnavigation leidet unter akkumulierenden Fehlern: Der Lokalisierungsfehler wächst über alle Grenzen. b) Geometriesensoren erlauben die Stützung der Roboterlageschätzung durch Vermessung bekannter Landmarken.

3.1 Anschauliche Beschreibung des Lokalisierungsverfahrens

Dieser Abschnitt versucht einen vereinfachten Überblick über das vorgeschlagene Verfahren zur modellbasierten Bestimmung der Lage eines mobilen Roboters zu geben. Dies soll nicht nur die hier vertretene Sichtweise verdeutlichen, sondern auch die später formal hergeleiteten Algorithmen motivieren.

Als Grundlage des Lokalisierungsverfahrens wird ein Modell der Umgebung des Roboters benötigt. Dieses besteht aus einer zweidimensionalen Umweltkarte, die alle bekannten und für die Lagebestimmung relevanten Merkmale enthält.

Zu Beginn einer Serviceaufgabe sei über die initiale Roboterlage nur geringes Vorwissen vorhanden. Weiterhin sei ein im Stillstand gemessener Satz von Winkeln zu bekannten Landmarken gegeben, wobei aber die Zuordnung von Winkeln zu Landmarken zunächst unbekannt ist. Zur Bestimmung der Roboterlage muß also erst einmal diese Zuordnung gesucht werden. Um während der Durchführung des Suchverfahrens den Berechnungsaufwand gering zu halten, wird eine effiziente, geschlossene Lösung zur Konversion von Winkelmessungen in Roboterlagen verwendet.

Sobald die initiale Roboterlage bekannt ist, kann sich der Roboter in Bewegung setzen. Während der Bewegung wird nun nicht bei jeder Messung die Roboterlage ohne Vorgabe neu bestimmt, sondern es wird eine rekursive Zustandsschätzung durchgeführt. Dabei wird das Problem der Schätzung eines Zustands aus Beobachtungen, welche durch systematische oder stark korrelierte Fehlerquellen gestört sind, mit Hilfe der in Kapitel 2 dargestellten Methoden der mengenbasierten Zustandsschätzung angegangen. Die auftretenden Unsicherheiten werden also nicht durch die Angabe von Verteilungsdichten und Spektren, sondern

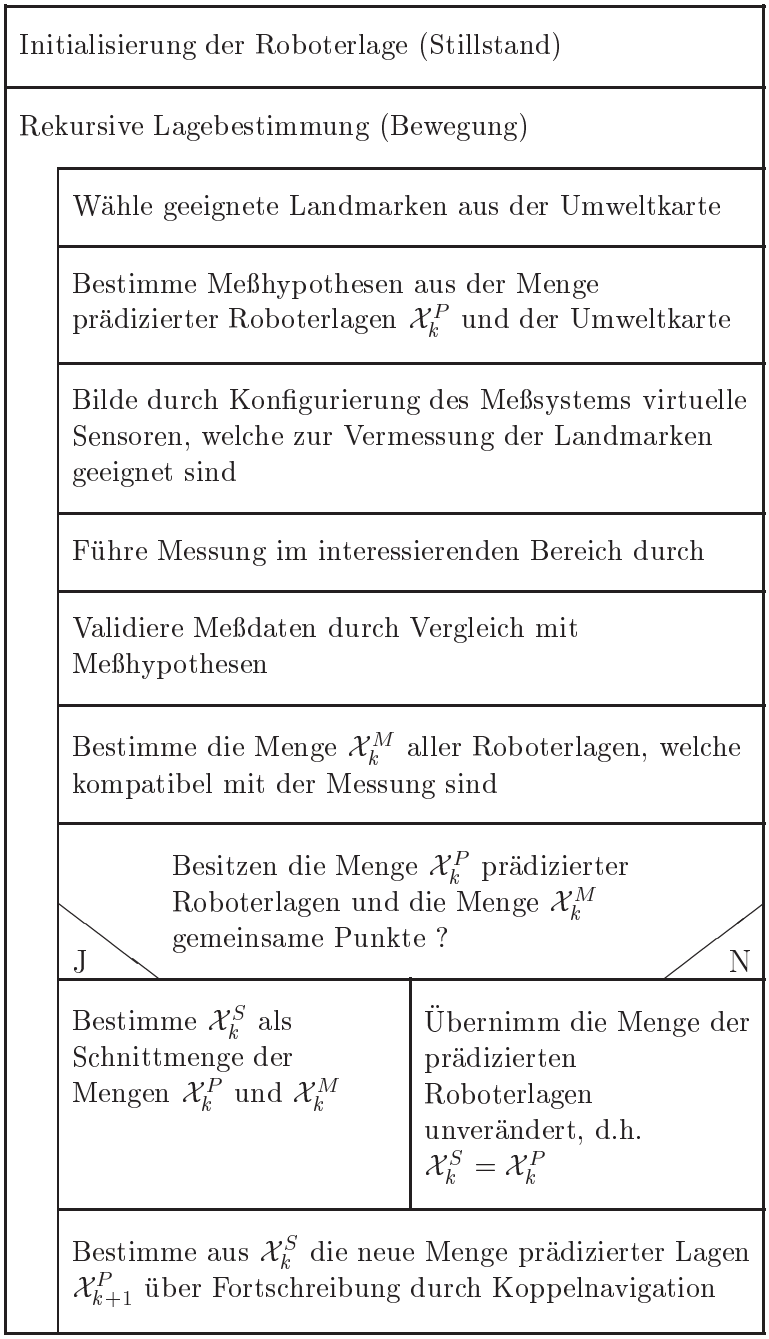


Abbildung 3.2: Schätzung der Lage eines mobilen Roboters mit einem abstrakten Sensor.

lediglich durch Angabe von Amplitudengrenzen beschrieben; potentielle Lösungen werden somit durch Mengen dargestellt.

Ein Verfahren zur inkrementellen Lageschätzung dient zur Prädiktion der Roboterlage durch Fortschreibung der letzten Schätzung, Abb. 3.1. Interne Sensoren bestimmen dabei die Menge $\mathcal{X}_k^\Delta$ aller möglichen relativen Lageänderungen in einem Abtastintervall bezogen auf die Ausgangslage $\mathcal{X}_{k-1}^P$ zum Zeitpunkt $k-1$. Da auch die Ausgangslage $\mathcal{X}_{k-1}^P$ Unsicherheiten unterworfen ist, müssen diese beiden Mengen nun „addiert“ werden, um die Menge $\mathcal{X}_k^P$ der prädizierten Lagen zum Zeitpunkt k zu berechnen.

Da die Unsicherheit der inkrementellen Lageprädiktion mit der Zeit über alle Grenzen wächst, muß von Zeit zu Zeit ein externer Sensor zur Stützung der Lageschätzung herangezogen werden. Die auf vorangegangenen Messungen basierende Lageprädiktion dient dabei

zusammen mit der Umweltkarte sowohl zum Aufstellen von Meßhypothesen als auch zur Konfiguration des Multisensorsystems. Bei dieser Sensoreinsatzplanung werden situationsabhängig von einem regelbasierten Algorithmus die zur Lokalisierung geeigneten Landmarken automatisch aus der Umweltkarte ausgewählt. Für jede der gewählten Landmarken wird dann derjenige (virtuelle) Sensor bestimmt, der zur Vermessung dieser Landmarke besonders gut geeignet ist. Aus der unsicheren Roboterlage, den unsicherheitsbehafteten Landmarkenpositionen und den Meßfehlergrenzen werden schließlich für jeden (virtuellen) Sensor Meßwerthypothesen aufgestellt. Der Sensor muß also nun lediglich in einem kleinen interessierenden Bereich messen, was zu einer Steigerung der Robustheit der Messung und zu einer Erhöhung der Datenrate führt.

Jede Messung definiert zusammen mit der Menge möglicher Landmarkenpositionen und den a priori gegebenen Meßfehlergrenzen eine Menge möglicher Roboterlagen $\mathcal{X}_k^M$. Diese Menge $\mathcal{X}_k^M$ wird mit der Menge prädizierter Roboterlagen $\mathcal{X}_k^P$ fusioniert, wodurch sich eine neue Lageschätzung $\mathcal{X}_k^S$ ergibt. Fusion im mengenbasierten Sinn bedeutet zunächst die Überprüfung der beiden Mengen $\mathcal{X}_k^M$ und $\mathcal{X}_k^P$ auf gemeinsame Punkte und, sollte dies der Fall sein, die Bildung der Schnittmenge. Für einen abstrakten Sensor ist dieses Vorgehen in der Abb. 3.2 zusammengefaßt.

Um zu effizienten Algorithmen zur mengenbasierten Zustandsschätzung zu gelangen, werden die exakten Roboterlagemengen durch einfache Mengen approximiert, wobei hier Ellipsoide und deren degenerierte Formen Verwendung finden. Dies führt zu der Forderung nach effizienten Verfahren für 1. die „Addition“, 2. den Test auf Überlappung und 3. die Bestimmung der Schnittmenge zweier Ellipsoide.

Das Verfahren zur Bestimmung der initialen Roboterlage wird in Abschnitt 3.3 erläutert. Abschnitt 3.4 beschreibt die inkrementelle Fortschreibung einer gegebenen Roboterlage auf der Basis von internen Sensoren, welche auch vorteilhaft auf *omnidirektionale* mobile Roboter anwendbar ist. In den Abschnitten 3.5 und 3.6 wird das beschriebene Vorgehen zur rekursiven Lagebestimmung für Winkelmeßsysteme bzw. für Distanzsensor–Arrays detailliert. Abschnitt 3.7 diskutiert zunächst die Vorteile eines Multisensorsystems und stellt dann ein Verfahren zur dezentralen Fusion der konkurrierenden Lageschätzungen verschiedener Sensoren in einem Multisensorsystem vor. Im Anschluß wird eine Gesamtübersicht des Verfahrens zur modellbasierten Lokalisierung eines mobilen Roboters gegeben.

3.2 Umweltmodell

Das für die modellbasierte Lokalisierung eines mobilen Roboters benötigte Umweltmodell besteht in dieser Arbeit aus einer zweidimensionalen Karte. Diese ist zur Lokalisierung eines in der Ebene beweglichen, mobilen Roboters ausreichend. Neben der nominalen Lage der Landmarken bezüglich des Inertialkoordinatensystems enthält die Karte auch die angenommenen Unsicherheiten in den Landmarkenlagen. Zur Lokalisierung eines mobilen Roboters

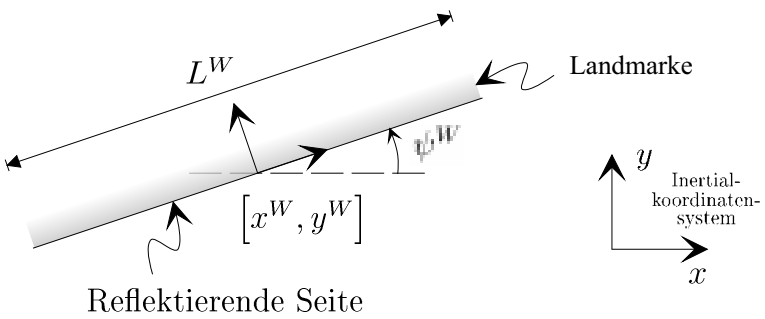


Abbildung 3.3: Modellierung einer dreidimensionalen, ebenen Landmarke als Strecke in der zweidimensionalen Projektion.

mit Hilfe eines Distanzsensor–Arrays werden natürliche Umweltmerkmale durch zwei Typen von Landmarken repräsentiert, das Winkelmeßsystem benötigt einen Typ von passiven künstlichen Landmarken.

Distanzsensor–Array: Wände, Schränke, Türen und Tischkanten werden in der zweidimensionalen Projektion durch Strecken modelliert. Es wird dabei die in Abb. 3.3 gezeigte redundante Beschreibung einer Strecke durch vier Parameter x^W, y^W, ψ^W, L^W verwendet, welche gewährleistet, daß die Wirkung der angenommenen Lageunsicherheiten auf die Schätzung der Roboterlage nicht von der Lage der Landmarke bezüglich des Inertialkoordinatensystems abhängt. Der Winkel ψ^W bezeichnet den Winkel zur reflektierenden Seite des ebenen Reflektors. L^W gibt die Gesamtlänge des Reflektors an. Vertikale Strukturen wie Türstöcke, Ecken und Tischbeine werden in der zweidimensionalen Projektion als Punkte modelliert.

Winkelmeßsystem: Die im Zusammenhang mit dem Winkelmeßsystem zur Lokalisierung verwendeten künstlichen Landmarken werden in der zweidimensionalen Projektion als Punkte modelliert.

Die Lagen der Landmarken bezüglich des Inertialkoordinatensystems werden entweder 1. einem Gebäudeplan entnommen, 2. manuell vermessen, oder 3. mit den Meßsystemen des Roboters während einer Erkundungsfahrt unter menschlicher Aufsicht bestimmt oder verbessert. Die so erhaltenen Landmarkenpositionen werden dann zusammen mit ermittelten Unsicherheiten in die Umweltkarte eingetragen.

Die Lage $\underline{x}^{\mathrm{LM}}$ der Landmarken ist im Fall von Landmarken mit punktförmiger Projektion jeweils durch

$$\underline{x}^{\mathrm{LM},P} = \left[x^P, y^P\right]^T \quad ,$$

und im Fall von Landmarken mit linienförmiger Projektion durch

$$\underline{x}^{\mathrm{LM},W} = \left[x^W, y^W, \psi^W\right]^T$$

gegeben. Fehler $\Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}}$ in der Lage der Landmarken $\underline{x}^{\mathrm{LM}}$ werden hier als konstante, additive Größen angenommen und im mengentheoretischen Sinne durch Amplitudengrenzen beschrieben. Es wird also vorausgesetzt, daß sich die tatsächliche, aber unbekannte Landmarkenlage $\underline{\tilde{x}}^{\mathrm{LM}}$ innerhalb einer Menge $\mathcal{X}^{\mathrm{LM}}$ befindet. $\mathcal{X}^{\mathrm{LM}}$ wird hier durch ein Ellipsoid beschrieben, das um die beste vorliegende Schätzung der Landmarkenlage zentriert ist. Der Mittelpunkt wird deshalb als nominale Landmarkenlage $\underline{\hat{x}}^{\mathrm{LM}}$ bezeichnet. Die Menge ist gegeben durch

$$\mathcal{X}^{\mathrm{LM}} = \left\{\underline{x}^{\mathrm{LM}} : \underline{x}^{\mathrm{LM}} = \underline{\hat{x}}^{\mathrm{LM}} + \Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}},\ \Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}} \in \Delta\mathcal{X}^{\mathrm{LM}}\right\} \quad ,$$

mit

$$\Delta\mathcal{X}^{\mathrm{LM}} = \left\{\Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}} : \left(\Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}}\right)^T \left(\mathbf{X}^{\mathrm{LM}}\right)^{-1} \Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}} \leq 1\right\} \quad ,$$

wobei $\mathbf{X}^{\mathrm{LM}}$ gemäß Anhang B.1 die Definitionsmatrix des Ellipsoids darstellt.

In die Umweltkarte werden zusätzlich Trennlinien eingetragen, welche die Verdeckungen der Landmarken durch bekannte Objekte nachbilden.

3.3 Bestimmung der initialen Roboterlage

In diesem Abschnitt wird ein schnelles und zuverlässiges Verfahren zur Initialisierung der Roboterlageschätzung auf der Basis von Winkelmessungen zu bekannten Landmarken vorgestellt. Dieses Verfahren wird in ähnlicher Art und Weise auch für die Initialisierung mit Hilfe von Distanzsensor–Arrays verwendet [11, DA1]. Das betrachtete Szenario ist sehr allgemein und durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

- ◇ Die Landmarken sind mit dem Winkelmeßsystem nicht zu unterscheiden, d.h. sie sind nicht kodiert.
- ◇ Es können Fehlmessungen auftreten, d.h. einige der gemessenen Winkel stammen nicht von modellierten Landmarken, sondern von unbekannten Objekten.
- ◇ Die Initialisierung kann in Räumlichkeiten mit nichtkonvexem Grundriß stattfinden, wobei es zu Verdeckungen von Landmarken durch bekannte stationäre Gegenstände wie z.B. Wände oder Schränke kommt. Diese werden, wie bereits im letzten Abschnitt angesprochen, durch Trennlinien modelliert. Weiterhin treten Verdeckungen durch unbekannte Objekte auf.

Zur Initialisierung der Roboterlage muß zunächst die Zuordnung der gemessenen Winkel zu den Landmarken bestimmt werden, dann kann die Lage berechnet werden. Ein einfaches Beispiel ist in der Abb. 3.4 dargestellt.

Eine naive, enumerative Vorgehensweise zur Lösung des Zuordnungsproblems würde zu einer kombinatorischen Explosion führen. Es wird daher im folgenden ein effizienter Zuordnungsalgorithmus hergeleitet. Dazu werden einige selbstverständliche Annahmen gemacht:

- ◇ Es liegen $N > 3$ gemessene Winkel vor. Es sind mindestens $N = 3$ Winkel nötig, um die Lage eines Roboters in der Ebene zu bestimmen, falls die Zuordnung von Winkeln zu Landmarken bekannt ist. $N > 3$ Winkel sind notwendig, falls die Zuordnung noch bestimmt werden muß.
- ◇ Die Positionen der Landmarken sind zusammen mit den angenommenen Positionsunsicherheiten in einer Umgebungskarte verzeichnet.
- ◇ Es existiert Vorwissen über die Roboterlage, welches in der Form eines Lageellipsoids $\mathcal{X}_{\text{a priori}}$ spezifiziert wird, das alle möglichen initialen Roboterlagen enthält. Dieses Vorwissen kann entweder von einem Benutzer oder aus der vorhergehenden Mission stammen.

Weiterhin wird eine vereinfachende Annahme gemacht, die in typischen Applikationen erfüllt ist und einen Vorverarbeitungsschritt erlaubt, der die Komplexität des Problems deutlich reduziert: Alle bekannten Landmarken lassen sich über einen geschlossenen Linienzug verbinden, welcher entlang der Trennlinien, d.h. niemals im Freiraum, verläuft. In diesem Fall läßt sich eine standortinvariante Sortierung der Landmarken finden, Abb. 3.5. Die Landmarken lassen sich also derart sortieren, daß die von einem beliebigen Standort innerhalb des eingeschlossenen Gebiets sichtbaren Marken in aufsteigender Reihenfolge gesehen werden, wenn das Winkelmeßsystem die Umgebung im mathematisch positiven Sinn abtastet. Diese Sortierung der Landmarken muß nur ein einziges Mal durchgeführt werden.

Gilt diese Annahme nicht, so läßt sich der Raum trotzdem immer derart aufteilen, daß innerhalb einer Parzelle eine standortinvariante Sortierung der Landmarken möglich ist. Das

zu beschreibende Suchverfahren läßt sich also auch auf allgemeinere Landmarkenkonfigurationen erweitern.

Der Zuordnungsalgorithmus wird mit Hilfe eines Interpretations–Baums [12, 18] hergeleitet, wobei in der ersten Schicht des Baumes der erste gemessene Winkel den Landmarken zugeordnet wird, in der zweiten Schicht der zweite Winkel, ... Für N gemessene Winkel hat der Baum damit eine Tiefe von N Schichten. Wie in der Abb. 3.6 gezeigt, gibt ein Knoten mit der Nummer $Z_i \in \{1, 2, \ldots, M\}$ diejenige Landmarke an, welche dem gemessenen Winkel i zugeordnet wird. Damit wird eine Zuordnung von N Messungen zu Landmarken als Vektor

$$\underline{Z} = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_N]^T$$

repräsentiert.

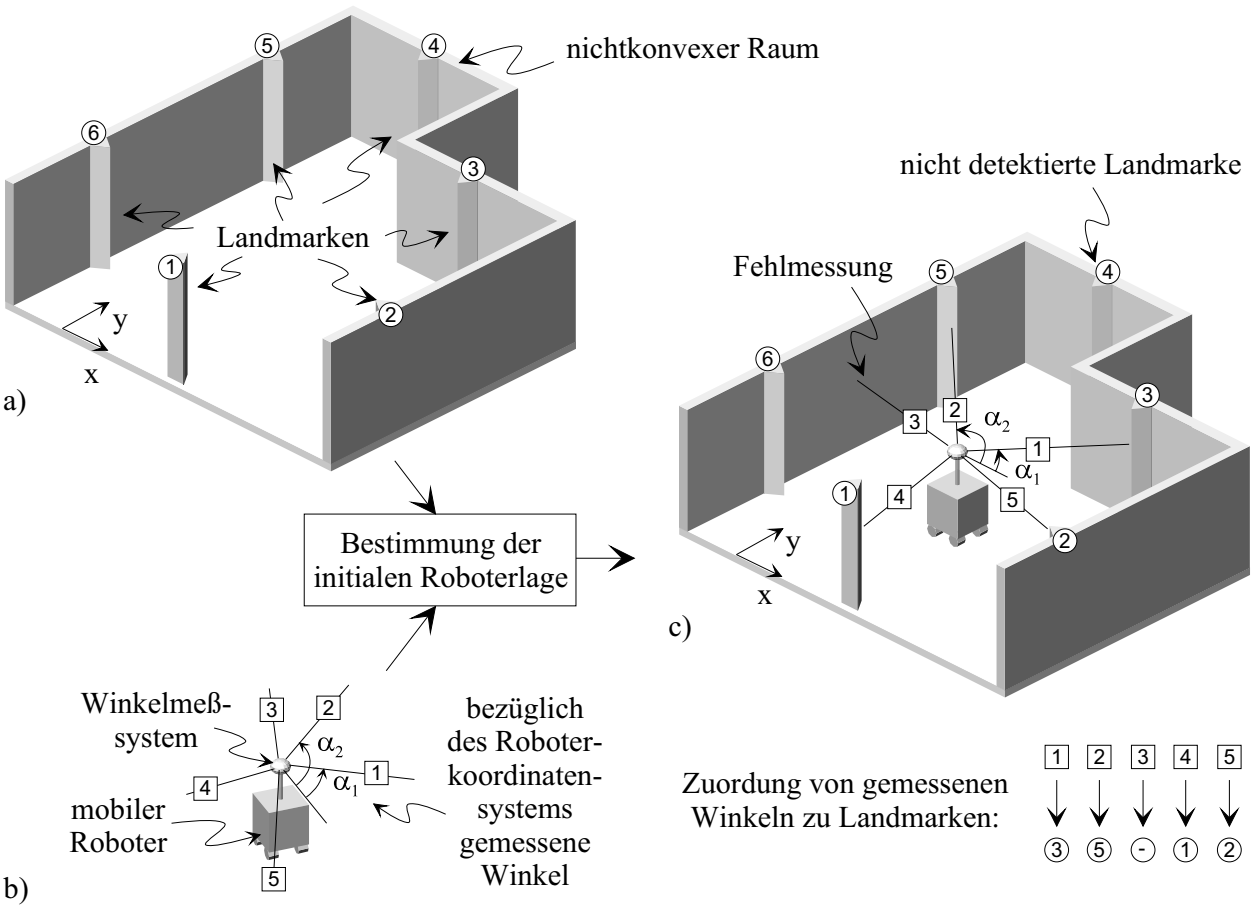


Abbildung 3.4: Beispiel zur Bestimmung der initialen Roboterlage mit Hilfe von Winkelmessungen zu bekannten Landmarken, wobei zunächst die Zuordnung von Winkelmessungen zu Landmarken unbekannt ist. a) Die Karte der bekannten vertikalen Landmarken. b) Der Satz der bezüglich des Roboterkoordinatensystems gemessenen Winkel. c) Erfolgte Zuordnung von Winkelmessungen zu Landmarken, wobei der Datensatz Fehlmessungen enthielt und einige Landmarken nicht detektiert wurden.

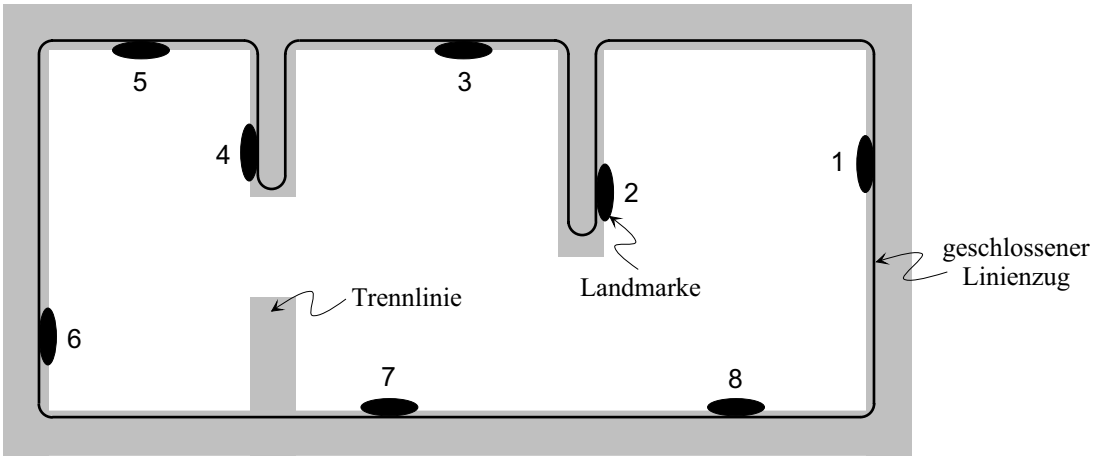


Abbildung 3.5: Beispiel für einen Innenraum, in dem eine standortinvariante Sortierung der Landmarken möglich ist.

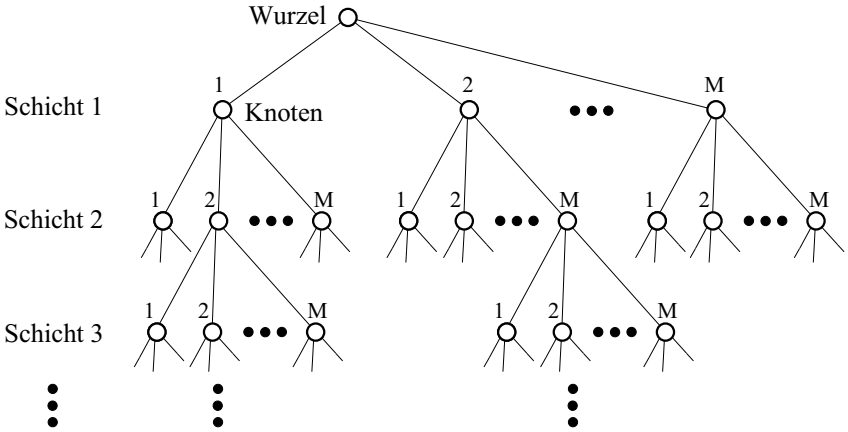


Abbildung 3.6: Verwendung eines Interpretationsbaums zur Herleitung des Zuordnungsalgorithmus.

3.3.1 Schnelle Exploration des Interpretationsbaums

Ausgehend von der Wurzel wird der Interpretationsbaum in einer Tiefensuche exploriert. Da es schon bei wenigen Landmarken nicht mehr sinnvoll ist, alle Knoten zu durchlaufen, werden während der Exploration einige Bedingungen überprüft, welche es bei Nichterfüllung erlauben, schon möglichst in den ersten Schichten ganze Unterbäume zu entfernen, ohne diese explizit zu untersuchen.

Zur Vorbereitung der Exploration wird zunächst eine Sichtbarkeitsmatrix $\mathbf{V} \in \mathcal{M}_{N,M}$ bestimmt. Die Elemente $\mathbf{V}_{ij}$ sind boole'sche Variable, welche nur dann `WAHR` sind, falls die Einzelmessung α_i von der Landmarke j stammt. $\mathbf{V}$ wird erstellt, indem von $\mathcal{X}_{\text{a priori}}$ aus für jeden *einzelnen* gemessenen Winkel die mögliche Sichtbarkeit von Landmarken überprüft wird. Falls die Zeile i der Sichtbarkeitsmatrix keinen wahren Wert enthält, so wurde die Messung α_i bereits als Fehlmessung identifiziert. Die Zeile i wird in diesem Fall entfernt und die Anzahl der Messungen N dekrementiert.

Es ergeben sich damit die folgenden Bedingungen, mit denen während der Exploration schnell Unterbäume verworfen werden können:

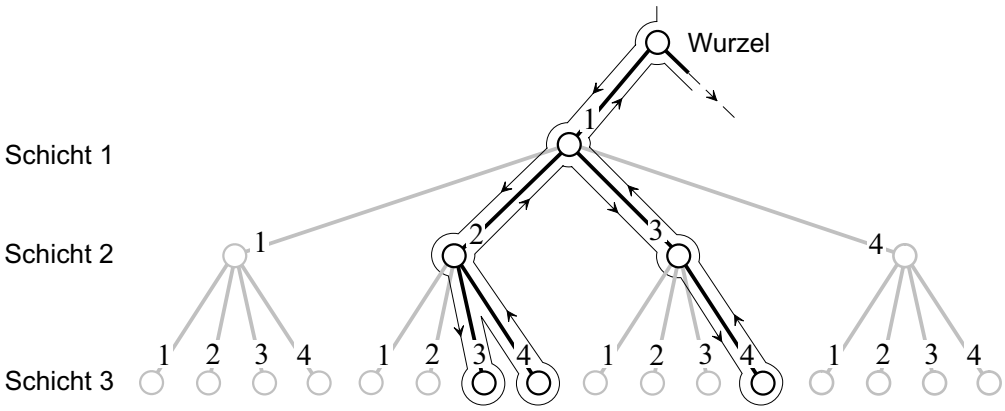


Abbildung 3.7: Beschneiden des Interpretationsbaums durch Ordnungsbedingungen und die daraus resultierende Reihenfolge der Exploration: Ausschnitt aus einem beispielhaften Interpretationsbaum für 3 gemessene Winkel und 4 Landmarken.

1. Da die gemessenen Winkel und auch die Landmarken geordnet sind, brauchen in der Ebene i nur Knoten berücksichtigt werden, für die gilt

$$Z_i \in \{(Z_{i-1}+1) \bmod M\ ,\ \ldots\ ,\ (Z_1 - N - 1 + i) \bmod M\} \quad .$$

   Alle anderen Knoten und die entsprechenden Unterbäume können verworfen werden, wie in der Abb. 3.7 verdeutlicht.

2. Ist der Eintrag $\mathbf{V}_{ij}$ in der Sichtbarkeitsmatrix $\mathbf{V}$ `FALSCH`, so können alle Teilbäume ausgehend von Knoten j in der Schicht i verworfen werden.

3. Beim Durchlaufen des Baumes werden auch Teilzuordnungen durch einen Modelltest überprüft. Ist schon eine Teilzuordnung nicht plausibel, wird der darunterliegende Teilbaum verworfen.

Die Plausibilität eines Zuordnungskandidaten wird mit Hilfe eines Modelltests überprüft. Hierzu wird mit Hilfe der in Kapitel 4.1 noch herzuleitenden geschlossenen Lösung die Menge aller möglichen Roboterpositionen für die zu testende Zuordnung berechnet. Liegt die Lösung innerhalb der a priori gegebenen Fehlergrenzen für die Winkelmessung und die Landmarkenpositionen, so wird zusätzlich überprüft, ob die Lösung mit dem Vorwissen kompatibel ist und ob alle zugeordneten Landmarken sichtbar sind. Sind diese drei Bedingungen erfüllt, ist der Kandidat plausibel, sonst wird er verworfen.

Diese Form der Beschneidung des Interpretationsbaums führt zu einer enormen Reduktion der erforderlichen Suchschritte. Leider läßt sich kein allgemeingültiger Ausdruck für die erzielte Einsparung angeben, da der Verlauf der Exploration des Interpretationsbaums von der konkreten Landmarkenkonfiguration abhängt.

3.3.2 Behandlung von Fehlmessungen

Im vorigen Abschnitt wurde berücksichtigt, daß einige der Landmarken verdeckt sind, zu diesen also keine Winkel gemessen werden können. Es wurde aber davon ausgegangen, daß ein gemessener Winkel von einer modellierten Landmarke stammt, falls die entsprechende Zeile in der Sichtbarkeitsmatrix mindestens ein wahres Element enthält. In der Tat kann es sich aber auch hierbei um Fehlmessungen handeln, so daß auch Zuordnungen untersucht

werden müssen, welche sich durch Entfernen von diesen Winkeln aus dem Originaldatensatz ergeben. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß mindestens $N_{\min}$ Winkel gültig sind, wobei $N_{\min} > 3$ gilt, wie bereits auf Seite 34 vorausgesetzt.

Das Ziel ist das schnellstmögliche Auffinden derjenigen plausiblen Zuordnung [12], welche die kleinste Anzahl der gemessenen Winkel als Fehlmessungen interpretiert, da die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Mehrdeutigkeiten mit steigender Anzahl der gemessenen Winkel sinkt. Zur Herleitung einer geeigneten Suchreihenfolge wird gedanklich in jeder Ebene ein Zusatzknoten eingeführt, welcher das Entfernen des entsprechenden Winkels symbolisiert. Diese Knoten werden beim Durchlauf als letztes, d.h. vor dem Backtracking in die vorhergehende Ebene, aufgedeckt. Es werden aber niemals mehr als $N - N_{\min}$ dieser Zusatzknoten aufgedeckt, d.h. niemals mehr als $N - N_{\min}$ Winkel entfernt. Wird im Verlauf der Suche eine plausible Zuordnung gefunden, welche mehr als $N_{\min}$ Winkel beinhaltet, so wird $N_{\min}$ inkrementiert.

3.4 Fortschreibung der Roboterlage durch Koppelnavigation

Ist die anfängliche Initialisierung abgeschlossen, so kann sich der Roboter in Bewegung setzen, wobei die Roboterlage durch Koppelnavigation fortgeschrieben wird. Unter Koppelnavigation ist die inkrementelle Fortschreibung einer gegebenen Roboterlage mit Hilfe von internen Sensoren zur Bestimmung der Lage*änderung* zu verstehen. In Abschnitt 3.4.1 wird zunächst der allgemeine Formalismus zur Fortschreibung der Roboterlage vorgestellt, wobei als Besonderheit eine mengentheoretische Betrachtungsweise vorgenommen wird.

Für den interessanten Spezialfall eines omnidirektionalen Roboters mit mehreren unabhängig lenkbaren, konventionellen Rädern wird in Abschnitt 3.4.3 ein odometriebasiertes Koppelnavigationsverfahren dargestellt. Dabei dient ein Modell der Fahrzeugkinematik zur Berechnung der Lageänderung. Die für diese Klasse von mobilen Robotern typischen Unsicherheiten in der Odometrie werden berücksichtigt und ihre Auswirkungen auf das Ergebnis der inkrementellen Lageschätzung untersucht.

3.4.1 Koppelnavigationsgleichungen

Die geschätzte Lage des Roboters zum Zeitpunkt $k-1$ wird mit $\underline{x}^S_{k-1} = \left[x^S_{k-1}, y^S_{k-1}, \psi^S_{k-1}\right]^T$ bezeichnet. Ist die inkrementelle Lageänderung $\underline{x}^\Delta_k$ zwischen den Zeitpunkten $k-1$ und k bezüglich der Roboterlage $\underline{x}^S_{k-1}$ gegeben, so ergibt sich für die prädizierte Roboterlage zum Zeitpunkt k der bekannte Zusammenhang

$$\underline{x}^P_k = \underline{x}^S_{k-1} + \mathbf{T}_k \underline{x}^\Delta_k \tag{3.1}$$

mit der Rotationsmatrix

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \cos(\psi^S_{k-1}) & -\sin(\psi^S_{k-1}) & 0 \\ \sin(\psi^S_{k-1}) & \cos(\psi^S_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Dieser Zusammenhang wird im folgenden mengentheoretisch interpretiert.

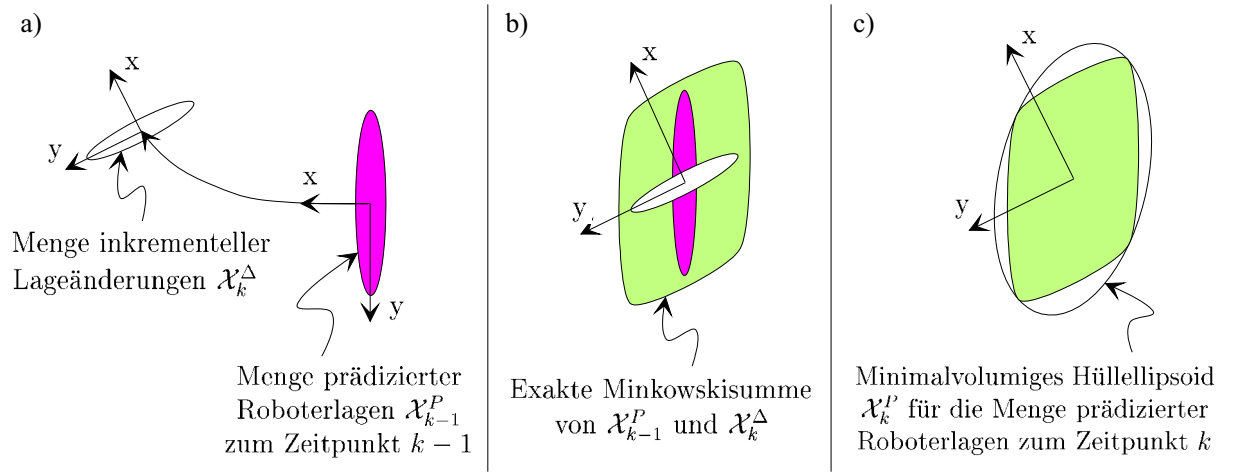


Abbildung 3.8: a) Die vom Odometriesystem bereitgestellte Menge inkrementeller Lageänderungen $\mathcal{X}_k^\Delta$. b) Darstellung der exakten MINKOWSKI–Summe von $\mathcal{X}_{k-1}^P$ und $\mathcal{X}_k^\Delta$ gemäß (3.2). c) Die Approximation der exakten MINKOWSKI–Summe durch ein Hüllellipsoid gemäß (3.4).

3.4.2 Perturbationsanalyse für die Koppelnavigation

Es wird nun angenommen, daß Unsicherheiten in der inkrementellen Lageänderung $\underline{x}_k^\Delta$ unbekannt, aber in der Amplitude begrenzt sind. Die Menge aller möglichen Lageinkremente sei durch ein Ellipsoid

$$\mathcal{X}_k^\Delta = \left\{ \underline{x}_k^\Delta : \left(\underline{x}_k^\Delta - \hat{\underline{x}}_k^\Delta\right)^T \left(\mathbf{X}_k^\Delta\right)^{-1} \left(\underline{x}_k^\Delta - \hat{\underline{x}}_k^\Delta\right) \leq 1 \right\}$$

gegeben. Die exakte Menge der durch die Koppelnavigation fortgeschriebenen Lageschätzungen $\mathcal{X}_k^P$ ergibt sich damit als

$$\mathcal{X}_k^P = \left\{ \underline{x}_k^P : \underline{x}_k^P = \mathbf{I}\,\underline{x}_{k-1}^S + \mathbf{T}_k\,\underline{x}_k^\Delta\,,\ \underline{x}_{k-1}^S \in \mathcal{X}_{k-1}^S\,,\ \underline{x}_k^\Delta \in \mathcal{X}_k^\Delta \right\}\ , \tag{3.2}$$

wie in der Abb. 3.8 a) dargestellt, ist jedoch im allgemeinen kein Ellipsoid, Abb. 3.8 b). Zur unkomplizierten Bestimmung eines Ellipsoids als Approximation von $\mathcal{X}_k^P$ wird zunächst eine Linearisierung um die nominalen Werte durchgeführt. Damit ergibt sich

$$\underline{x}_k^P - \hat{\underline{x}}_k^P \approx \mathbf{J}_k^S \left(\underline{x}_{k-1}^S - \hat{\underline{x}}_k^S\right) + \hat{\mathbf{T}}_k \left(\underline{x}_k^\Delta - \hat{\underline{x}}_k^\Delta\right) \tag{3.3}$$

mit der Jacobi–Matrix

$$\mathbf{J}_k^S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\left(\hat{y}_k^P - \hat{y}_{k-1}^S\right) \\ 0 & 1 & \left(\hat{x}_k^P - \hat{x}_{k-1}^S\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

$\mathcal{X}_k^P$ kann nun gemäß Abschnitt 2.6.2 durch das Hüllellipsoid für die MINKOWSKI–Summe in (3.3) approximiert werden, Abb. 3.8 c), d.h.

$$\mathcal{X}_k^P \approx \left\{ \underline{x}_k^P : \left(\underline{x}_k^P - \hat{\underline{x}}_k^P\right)^T \left(\mathbf{X}_k^P\right)^{-1} \left(\underline{x}_k^P - \hat{\underline{x}}_k^P\right) \leq 1 \right\}\ , \tag{3.4}$$

mit

$$\hat{\underline{x}}_k^P = \mathbf{I}\,\hat{\underline{x}}_{k-1}^S + \hat{\mathbf{T}}_k\,\hat{\underline{x}}_k^\Delta$$

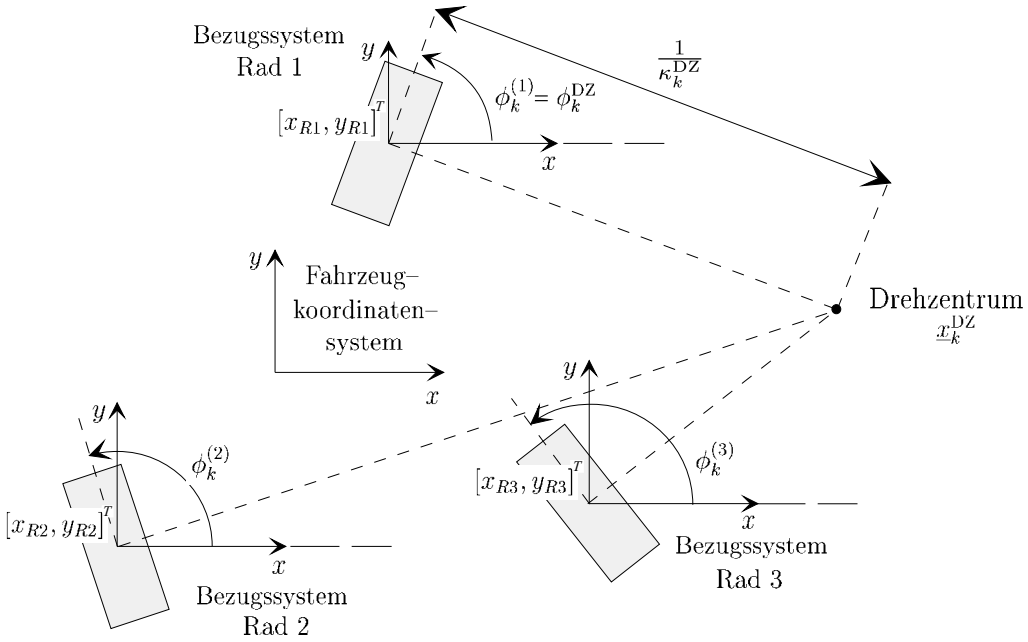


Abbildung 3.9: Omnidirektionaler Roboter. Idealisierte Betrachtung: Die Radnormalen schneiden sich in einem Punkt.

und

$$\mathbf{X}_k^P = \frac{1}{0.5-\kappa}\mathbf{J}_k^S\,\mathbf{X}_{k-1}^S\,\left(\mathbf{J}_k^S\right)^T + \frac{1}{0.5+\kappa}\hat{\mathbf{T}}_k\,\mathbf{X}_k^{\Delta}\,\hat{\mathbf{T}}_k^T\,,\ -0.5 < \kappa < 0.5\ .$$

κ für minimales Volumen $\mathbf{X}_k^P$ ergibt sich gemäß Anhang B.5.

3.4.3 Omnidirektionale Roboter mit konventionellen Rädern

Im folgenden wird nun der wichtige Spezialfall von Fahrzeugen mit einer beliebigen Anzahl von unabhängig lenkbaren, konventionellen Rädern diskutiert. Im Hinblick auf eine übersichtliche Darstellung und die Applikation, Kapitel 5, werden hier o.B.d.A. nur drei lenkbare Räder betrachtet, von denen eines angetrieben wird, Abb. 3.9. Voraussetzung für den Fahrbetrieb ist dabei die Koordinierung der Räder. Im Idealfall sollten sich die Radnormalen in einem Punkt, dem sogenannten Drehzentrum (DZ), schneiden. In der Praxis ist jedoch mit Abweichungen zu rechnen [DA5].

Zur Beschreibung des Drehzentrums wird eine singularitätenfreie Darstellung benötigt. Hierzu wird ein Bezugssystem ausgewählt, in dessen ϵ–Umgebung das Drehzentrum niemals zu liegen kommt. Es bietet sich dabei an, das Bezugssystem in den Drehpunkt des angetriebenen Rades zu legen, da die Lage des Drehzentrums in der unmittelbaren Nähe des angetriebenen Rades auch aus physikalischen Gründen ausgeschlossen werden muß. Das angetriebene Rad wird o.B.d.A. als Rad 1 bezeichnet. Jede physikalisch sinnvolle Lage $\underline{x}_k^{\mathrm{DZ}}$ des Drehzentrums bezüglich des Roboterkoordinatensystems zum Zeitpunkt k kann nun durch verallgemeinerte Polarkoordinaten ϕ_k^{DZ}, κ_k^{DZ} bezüglich des Koordinatensystems von Rad 1 in einem endlichen Zahlenbereich beschrieben werden. Die Transformation zwischen kartesischen und verallgemeinerten Polarkoordinaten lautet

$$\begin{aligned} x_k^{\mathrm{DZ}} &= x_{R1} - \frac{1}{\kappa_k^{\mathrm{DZ}}}\sin\left(\phi_k^{\mathrm{DZ}}\right) \\ y_k^{\mathrm{DZ}} &= y_{R1} + \frac{1}{\kappa_k^{\mathrm{DZ}}}\cos\left(\phi_k^{\mathrm{DZ}}\right)\quad , \end{aligned}$$

wobei $[x_{R1}, y_{R1}]$ die Position des Koordinatensystems von Rad 1 bezüglich des Roboterkoordinatensystems bezeichnet. Betrachtet man nun noch den zurückgelegten Weg W_k des Rades 1, so läßt sich diese Roboterkinematik vollständig durch ϕ_k^{DZ}, κ_k^{DZ} und W_k beschreiben. Unter der Annahme, daß ϕ_k^{DZ}, κ_k^{DZ} zum Zeitpunkt $k-1$ eingestellt werden und sich bis zum Zeitpunkt k nicht ändern, ergibt sich die inkrementelle Lageänderung bezüglich des Roboterkoordinatensystems zum Zeitpunkt $k-1$ zu [DA3]

$$\underline{x}_k^{\Delta} = W_k \begin{bmatrix} \cos\left(\phi_k^{\mathrm{DZ}}\right) + \kappa_k^{\mathrm{DZ}} y_{R1} \\ \sin\left(\phi_k^{\mathrm{DZ}}\right) - \kappa_k^{\mathrm{DZ}} x_{R1} \\ \kappa_k^{\mathrm{DZ}} \end{bmatrix} \quad . \tag{3.5}$$

Dies gilt allerdings nur für exakte Werte der absoluten Lage zum letzten Zeitpunkt und exakte Werte für ϕ_k^{DZ}, κ_k^{DZ} und W_k. In der Praxis müssen die Größen ϕ_k^{DZ}, κ_k^{DZ} und W_k aber aus gestörten Meßgrößen geschätzt werden. Als Meßgrößen stehen die Radlenkwinkel $\phi_k^{(i)}$ zum Zeitpunkt k und die zurückgelegten Wege $W_k^{(i)}$ der einzelnen Räder zwischen den Zeitpunkten $k-1$ und k zur Verfügung.

Die Hauptfehlerquellen der Odometrie bei einem omnidirektionalen Roboter mit mehreren unabhängig lenkbaren Rädern sind durch 1. Abweichungen bei der Radkoordination, 2. Fehler bei der Messung des zurückgelegten Weges der einzelnen Räder und 3. Unsicherheiten in den Radablaufpunkten gegeben. Unsicherheiten in der Lage der Drehpunkte der Räder und in den gemessenen Lenkwinkeln werden hier vernachlässigt. Abweichungen bei der Radkoordination bedeuten, daß die Radnormalen im allgemeinen drei Schnittpunkte aufweisen, also kein eindeutiges Drehzentrum existiert. Fehler in der gemessenen Weglänge stammen von Verunreinigungen sowie Abrieb und der daraus resultierende Veränderung der effektiven Raddurchmesser. Unsicherheiten in den Radablaufpunkten sind durch eine von Null verschiedene Breite der Räder bedingt.

Zur Schätzung der Größen ϕ_k^{DZ}, κ_k^{DZ} und W_k werden alle sechs Meßgrößen $\phi_k^{(i)}$, $W_k^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ herangezogen und zunächst die Schnittpunkte der Radnormalen bestimmt. Es ergeben sich im allgemeinen drei Schnittpunkte $\left[\phi_k^{\mathrm{DZ},1}, \kappa_k^{\mathrm{DZ},1}\right]^T$, $\left[\phi_k^{\mathrm{DZ},2}, \kappa_k^{\mathrm{DZ},2}\right]^T$, $\left[\phi_k^{\mathrm{DZ},3}, \kappa_k^{\mathrm{DZ},3}\right]^T$, welche in Abb. 3.10 dargestellt sind. Der Schwerpunkt der drei Schnittpunkte wird als nominales Drehzentrum verwendet und dient gleichzeitig als Mittelpunkt einer Unsicherheitsellipse. Deren Größe und Ausrichtung wird durch die Lage der drei Schnittpunkte definiert. Es wird dabei angenommen, daß das tatsächliche, also unbekannte, Drehzentrum innerhalb dieser Ellipse liegt. Damit gilt also $\left[\tilde{\phi}_k^{\mathrm{DZ}}, \tilde{\kappa}_k^{\mathrm{DZ}}\right]^T \in \Omega_k^{\mathrm{DZ}}$.

Zur Bestimmung von W_k werden die gemessenen Weginkremente $W_k^{(i)}$ auf Rad 1 umgerechnet und mit $W_k^{(1,i)}$ bezeichnet. Bei dieser Umrechnung müssen sowohl Unsicherheiten in den jeweiligen Radablaufpunkten ΔR_i als auch die Unsicherheit in der Lage des Drehzentrums berücksichtigt werden. W_k ergibt sich dann als Mittelwert der $W_k^{(1,i)}$. Aus Ω_k^{DZ} und einem Intervall für W_k wird die Menge der Lageänderungen $\mathcal{X}_k^{\Delta}$ berechnet. Diese kann schließlich in die allgemeine Koppelnavigationsgleichung nach (3.4) eingesetzt werden.

3.5 Rekursive Lokalisierung mit Winkelmeßsystemen

Die im letzten Abschnitt beschriebene Fortschreibung der Roboterlage durch Koppelnavigation geschieht über die Integration von Lageinkrementen, was zur Akkumulation von Meßfehlern führt. In diesem Abschnitt wird nun die laufende Stützung der geschätzten Roboterlage durch Winkelmessungen zu bekannten Landmarken diskutiert.

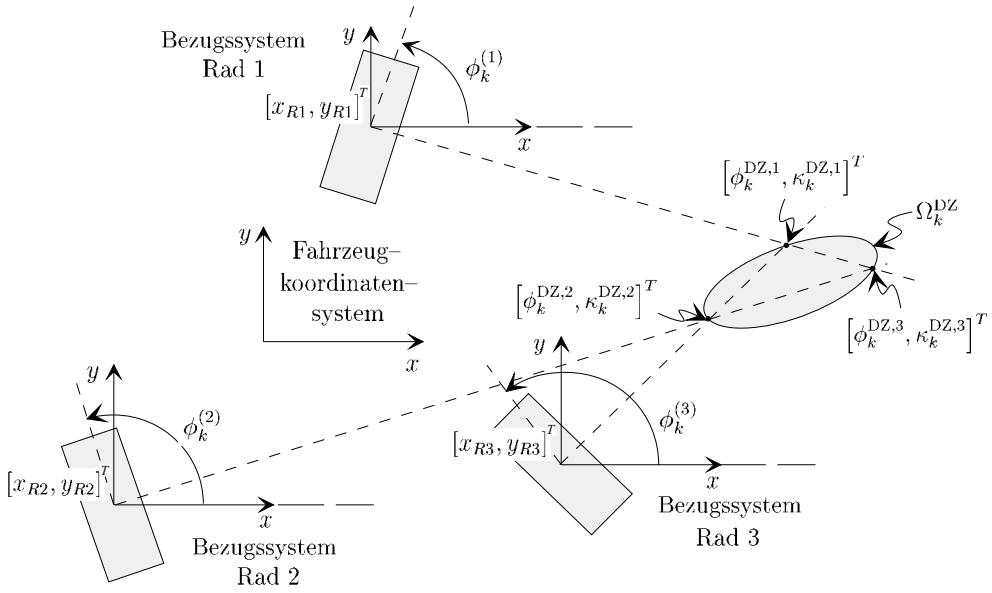


Abbildung 3.10: Omnidirektionaler Roboter. Reale Situation: Abweichungen bei der Radkoordinierung.

Dazu wird ein besonders zuverlässiges Lokalisierungsverfahren vorgeschlagen [116], welches durch Kombination von Koppelnavigation und vorangegangenen Messungen ein internes Modell der aktuellen Umgebungssituation aufrechterhält. Damit können während der Fahrt laufend die gerade sichtbaren Landmarken prädiziert werden. Für diese Landmarken werden dann Winkelhypothesen in Form von Intervallen aufgestellt, die zur Validierung tatsächlicher Winkelmessungen dienen: Ein gemessener Winkel wird derjenigen Landmarke zugeordnet, deren Hypothese erfüllt wird. In diesem Fall wird die Messung mit der prädizierten Roboterlage fusioniert und dient damit wieder der Verringerung des Prädiktionsfehlers zwischen dem internen Modell und der Realität. Kann dem gemessenen Winkel keine Landmarke zugeordnet werden, so wird die Messung verworfen.

3.5.1 Bestimmung potentiell sichtbarer Landmarken

Die in der Umweltkarte verzeichneten Landmarken werden von der prädizierten Roboterlage aus auf Verdeckungen durch Trennlinien untersucht. Hierzu wird zunächst die Strecke von der nominalen Roboterposition zur jeweiligen Landmarke bestimmt. Schneidet diese Strecke *keine* der in der Karte verzeichneten Trennlinien, so gilt die Landmarke als potentiell sichtbar.

Die Bestimmung der potentiell sichtbaren Landmarken kann mit einer geringeren Rate als Messung/Fusion erfolgen, da sich die Sichtbarkeit der Landmarken verglichen mit den Meßwerten nur selten ändert. Weiterhin braucht keine strenge Synchronisation vorgenommen werden, da Fehler bei der Bestimmung der Sichtbarkeit der Landmarken vom Lokalisierungsverfahren kurzzeitig toleriert werden. Dies wird in der prototypischen Implementierung ausgenutzt, und die Bestimmung potentiell sichtbarer Landmarken als niederpriorer, asynchroner, nebenläufiger Prozeß ausgeführt.

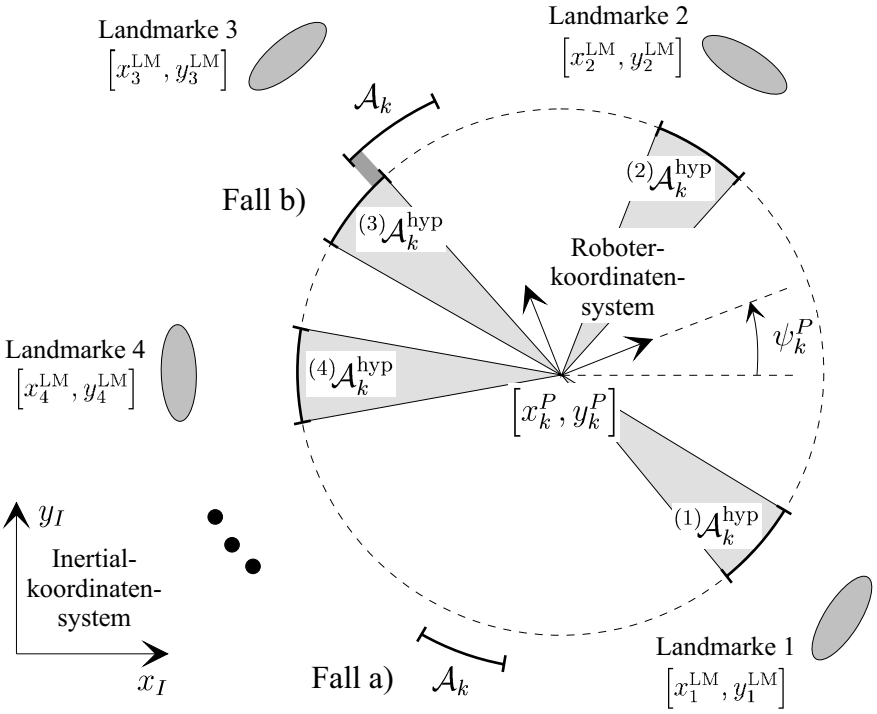


Abbildung 3.11: Überprüfung eines gemessenen Winkels durch Vergleich mit den gemäß Abschnitt 3.5.2 für alle sichtbaren Landmarken aufgestellten Winkelhypothesen. Fall a) Gemessener Winkel wird verworfen. Fall b) Gemessener Winkel wird akzeptiert.

3.5.2 Aufstellen von Winkelhypothesen

Nachdem dem Winkelmeßsystem mit dem Verfahren aus dem vorigen Abschnitt die potentiell sichtbaren Landmarken zugewiesen wurden, kann aus der prädizierten Roboterlage zum Zeitpunkt k nun für jede Landmarke i ein zu erwartender Winkel bestimmt werden. Für einen solchen hypothetischen Winkel gilt

$$^{(i)}\alpha_k^{\mathrm{hyp}} = \mathrm{atan2}\left(x_i^{\mathrm{LM}} - x_k^P, y_i^{\mathrm{LM}} - y_k^P\right) - \psi_k^P \quad .$$

Unter Berücksichtigung sowohl der Unsicherheiten in der Landmarkenposition als auch der Unsicherheiten in der Fahrzeugposition ergibt sich daraus $^{(i)}\alpha_k^{\mathrm{hyp}} \in {}^{(i)}\mathcal{A}_k^{\mathrm{hyp}}$ mit

$$^{(i)}\mathcal{A}_k^{\mathrm{hyp}} = \left\{ {}^{(i)}\alpha_k^{\mathrm{hyp}} : \left| {}^{(i)}\alpha_k^{\mathrm{hyp}} - {}^{(i)}\hat{\alpha}_k^{\mathrm{hyp}} \right| \leq {}^{(i)}\delta_k^{\alpha,\mathrm{hyp}} \right\} \quad , \tag{3.6}$$

wobei $^{(i)}\hat{\alpha}_k^{\mathrm{hyp}}$ den Nominalwert und $^{(i)}\delta_k^{\alpha,\mathrm{hyp}}$ die maximale Abweichung vom Nominalwert angibt.

Bei der Messung des Winkels α_k zum Zeitpunkt k treten zusätzlich Meßunsicherheiten auf. Hierbei wird angenommen, daß der wahre Winkel $\tilde{\alpha}_k$ in einer Menge $\mathcal{A}_k$ liegt, welche durch

$$\mathcal{A}_k = \{\alpha_k : |\alpha_k - \hat{\alpha}_k| \leq \delta_k^\alpha\}$$

gegeben ist. $\hat{\alpha}_k$ ist der Meßwert und δ_k^α ist eine a priori gegebene Grenze für den Meßfehler. Die Menge $\mathcal{A}_k$ der möglichen Winkel zu einer Landmarke wird nun mit den Winkelhypothesen für alle sichtbaren Landmarken verglichen. Existieren, wie in der Abb. 3.11 b) dargestellt, gemeinsame Punkte mit einem der durch (3.6) definierten Intervalle, so wird der gemessene Winkel der entsprechenden Landmarke zugewiesen, sonst verworfen, Abb. 3.11 a).

3.5.3 Menge der Roboterlagen definiert durch die Winkelmessung

Wurde der gemessene Winkel α_k akzeptiert, so kann die Menge aller Fahrzeuglagen bestimmt werden, welche kompatibel mit der Messung sind. Die exakte Menge aller Fahrzeugpositionen zum Zeitpunkt k ergibt sich bei Berücksichtigung der Unsicherheiten in sowohl der Winkelmessung als auch der Landmarkenposition zu

$$\mathcal{X}_k^M = \left\{ \underline{x}_k^M : \sin\left(\alpha_k + \psi_k^M\right) \left\{ x^{\mathrm{LM}} - x_k^M \right\} = \cos\left(\alpha_k + \psi_k^M\right) \left\{ y^{\mathrm{LM}} - y_k^M \right\}, \right.$$
$$\left. \alpha_k \in \mathcal{A}_k \,,\ \underline{x}^{\mathrm{LM}} \in \mathcal{X}^{\mathrm{LM}} \right\} \ .$$

Da es sich hier um eine Menge mit einer komplizierten Berandung handelt, wird $\mathcal{X}_k^M$ durch die Menge

$$\mathcal{X}_k^M \approx \left\{ \underline{x}_k^M : z_k = \underline{H}_k^T \underline{x}_k^M + e_k \,,\ e_k^2 \leq E_k \right\}$$

approximiert, welche als Berandung zwei parallele Ebenen aufweist. z_k, $\underline{H}_k$ und E_k ergeben sich durch Linearisierung um den Nominalwert der prädizierten Roboterlage $\underline{\hat{x}}_k^P$, den gemessenen Winkel $\hat{\alpha}_k$ und die nominale Landmarkenposition $\underline{\hat{x}}^{\mathrm{LM}}$.

3.5.4 Fusion der Winkelmessung mit prädizierter Roboterlage

Eine Lösung für die Roboterlage wird nun durch zwei Mengen definiert: 1. Die Menge $\mathcal{X}_k^P$ der durch die Koppelnavigation prädizierten Roboterlagen und 2. die Menge $\mathcal{X}_k^M$ der mit der Winkelmessung kompatiblen Roboterlagen. $\mathcal{X}_k^P$ ist ein dreidimensionales Ellipsoid, $\mathcal{X}_k^M$ ist ein Hyperstreifen in drei Dimensionen, d.h. durch zwei parallele Ebenen begrenzt.

Verfahren zur Fusion der beiden Mengen $\mathcal{X}_k^P$ und $\mathcal{X}_k^M$ wurden bereits in Kapitel 2.6 vorgestellt. Hier wird darum nur auf die Besonderheiten der mengenbasierten Fusion im Spezialfall des Winkelmeßsystems eingegangen: Eine winkelbasierte Lageschätzung weist, bedingt durch das Meßprinzip, eine höhere Genauigkeit bei der Schätzung der Orientierung ψ^S des Roboters als bei der Schätzung der Position $\left[x^S, y^S\right]$ auf. Bei der Approximation der Schnittmenge von $\mathcal{X}_k^M$ und $\mathcal{X}_k^P$ durch ein Hüllellipsoid ist es deshalb erwünscht, die Orientierungsschätzung konservativ zu behandeln, falls dadurch die kritischere Positionsschätzung genauer wird. Um dies zu erreichen, wird anstelle des Hüllellipsoids mit minimalem Volumen das Hüllellipsoid mit der minimalvolumigen Projektion auf die x/y–Ebene als Fusionsergebnis verwendet. Durch dieses Vorgehen werden nur Messungen verwendet, welche auch tatsächlich die Genauigkeit der *Positions*schätzung verbessern [116].

3.5.5 Zusammenfassung

Das vorgeschlagene Verfahren zur rekursiven Lokalisierung eines mobilen Roboters mit Hilfe von Koppelnavigation und einem Winkelmeßsystem ist für einen Abtastzeitschritt in der Abb. 3.12 zusammengefaßt.

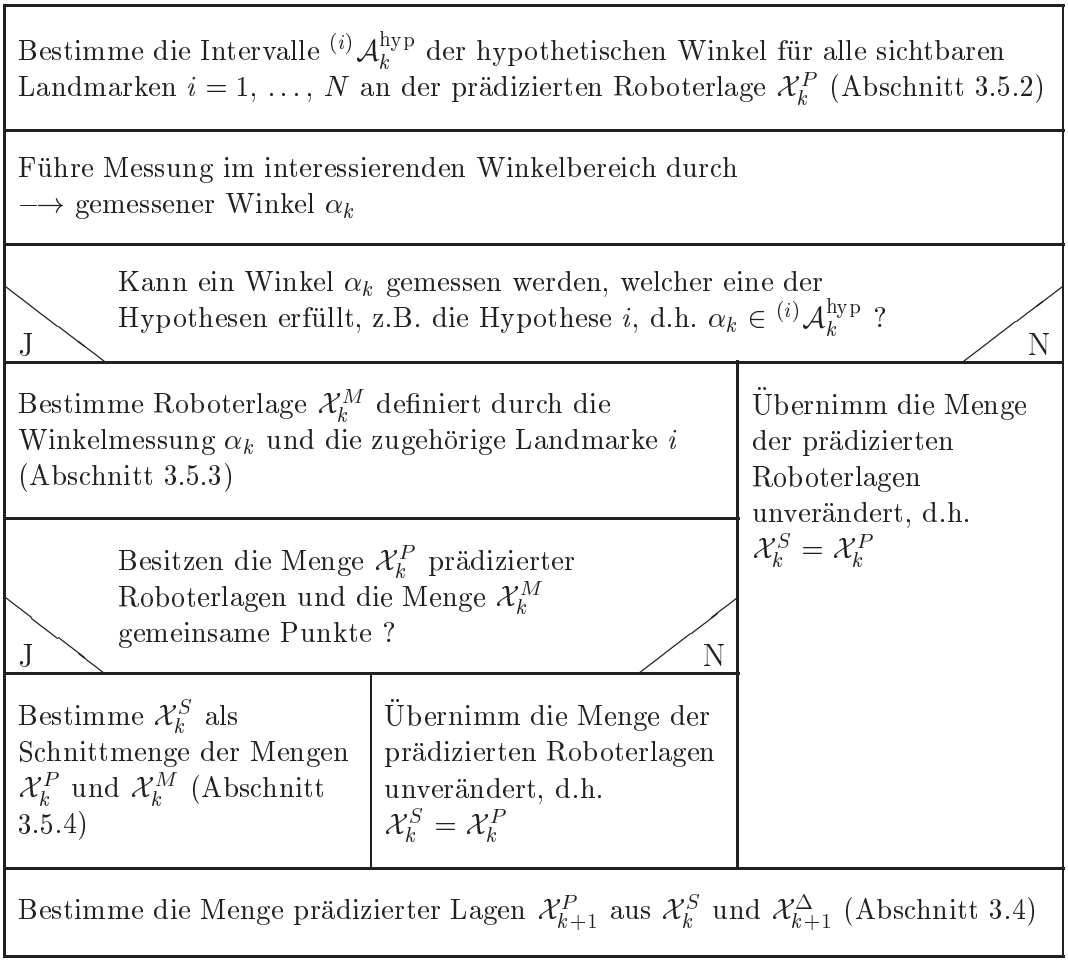


Abbildung 3.12: Zusammenfassung des Ablaufs der rekursiven Lokalisierung mit einem Winkelmeßsystem (ein Takt).

3.6 Rekursive Lokalisierung mit Distanzsensor–Arrays

Im folgenden wird angenommen, daß der betrachtete mobile Roboter gemäß Abb. 3.13 mit Distanzsensoren ausgestattet ist, welche nach dem Puls–Echo–Prinzip arbeiten. Dabei kann es sich beispielsweise um Ultraschallsensoren handeln, die aus der Laufzeit zwischen dem Aussenden eines Schallpulses und dem Eintreffen der Echos die Entfernung zu Objekten bestimmen [111].

Für einen Roboter mit dieser Ausstattung wird eine neue Methode zur *zuverlässigen* und *präzisen* Lokalisierung vorgestellt. Ähnlich wie bei der Behandlung von Daten des Winkelmeßsystems fiel hier die Wahl auf ein rekursives Verfahren. Dabei wird die über Koppelnavigation prädizierte Roboterlage zusammen mit einer Umweltkarte zur Erhöhung der Meßgenauigkeit und Meßrate der Distanzsensoren genutzt, wozu folgende Maßnahmen dienen:

1. **Dynamische Rekonfigurierung**: Es werden nur diejenigen Sensoren verwendet, die zur Verbesserung der Lageschätzung beitragen können. Aus der Umweltkarte werden geeignete Merkmale als Landmarken gewählt und passend ausgerichtete Sensoren zu Arrays zusammengefaßt. Durch eine ständige Rekonfigurierung verfolgen diese Arrays damit die ihnen zugeordneten Landmarken. Diese Form der Sensoreinsatzplanung erlaubt in einer Implementierung die elektronische Ausrichtung der Sensoren, so daß

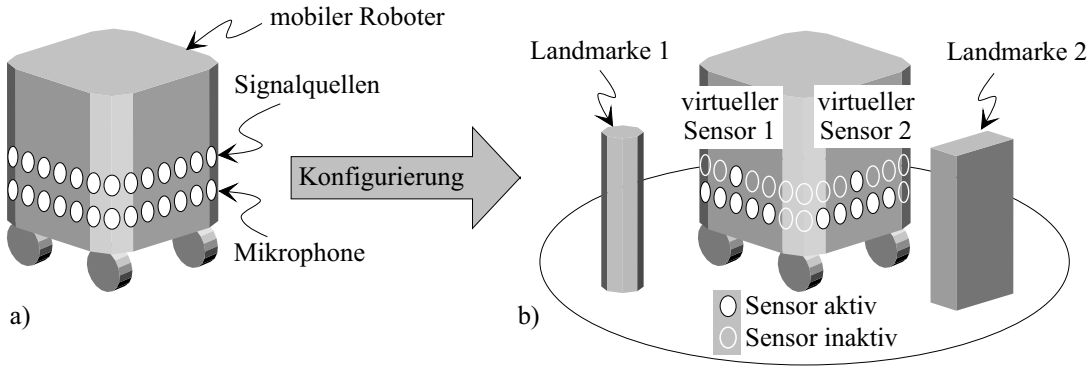


Abbildung 3.13: Dynamische Rekonfigurierung der Distanzsensor–Arrays: a) Die zur Verfügung stehenden Signalquellen und Mikrophone. b) Konfigurierung des Systems in Abhängigkeit von der prädizierten Lage der Landmarken $\longrightarrow$ Bildung von virtuellen Sensoren aus einem Array physikalischer Elemente.

keine beweglichen Teile erforderlich sind und damit langwierige Scan–Vorgänge wie in [4, 5, 63] vermieden werden.

2. **Bildung von Meßhypothesen**: Jeder virtuelle Sensor steigert die Robustheit des Meßvorgangs durch Prädiktion der zu messenden Distanzen und einer sich daraus ergebenden Fensterung der Meßsignale.

3. **Zeitmultiplex–Verfahren**: Durch die Fensterung entstehen Auslastungspausen in den Meßkanälen, so daß die Datenrate durch Verschachtelung mehrerer paralleler Meßsequenzen stark erhöht werden kann.

4. **Arrays zur Vermessung von Umweltmerkmalen**: Durch die Verwendung von Meßarrays können im Gegensatz zur Verwendung von Einzelsensoren aus *einer* Messung unmittelbar die geometrischen Parameter einer Landmarke bestimmt werden. Für eine Wand erhält man damit beispielsweise aus *einer* Messung nicht nur den *Abstand*, sondern auch die *Orientierung*.

Aus der Lage der Landmarken bezüglich des Roboterkoordinatensystems wird mit Hilfe des Umweltmodells die Lage des Roboters in der Welt ermittelt. Diese durch die Messung definierte Roboterlage wird dann mit der prädizierten Roboterlage fusioniert.

3.6.1 Dynamische Rekonfigurierung

Während der Fahrt wird das Distanzsensor–Array von einem einfachen, regelbasierten Algorithmus durch eine laufende Rekonfigurierung ständig an die aktuelle Umgebung angepaßt. Hierzu werden aus dem „Baukasten“ der zur Verfügung stehenden Sende– und Empfangselemente virtuelle Sensoren zusammengestellt, welche für die Verfolgung einzelner Umweltmerkmale wie Ecken und Wände verantwortlich sind. Der Begriff virtueller Sensor bezeichnet hier die Zusammenfassung mehrerer physikalischer Sensoren zu einer Einheit, welche zusammen mit einem entsprechenden Auswerteverfahren komplexere Perzeptionsaufgaben wahrnehmen kann.

Aus der aktuellen Schätzung der Fahrzeuglage und der Umweltkarte werden die Lagen zuverlässiger Merkmale prädiziert und diejenigen Sensoren zu Arrays zusammengefaßt, die zur Verfolgung am besten geeignet erscheinen. Da die Lagen der Merkmale bezüglich des

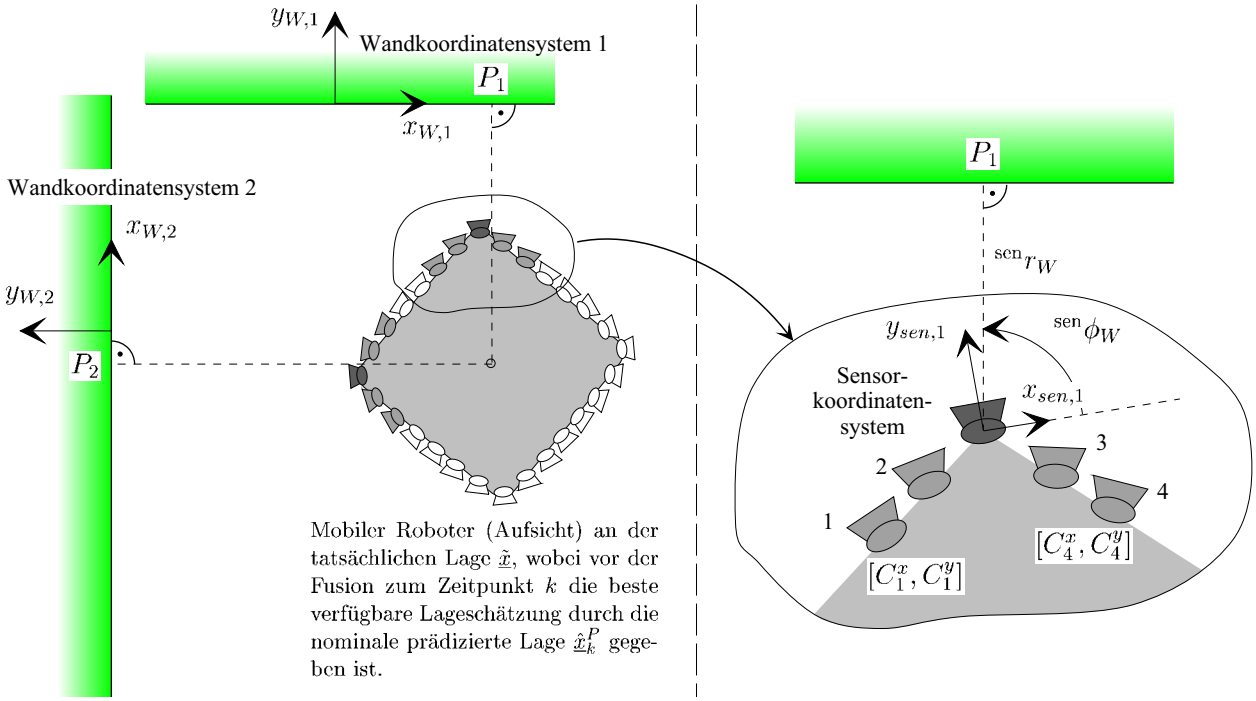


Abbildung 3.14: Beispiel zur Konfigurierung eines Distanzsensor–Arrays für zwei Landmarken mit linienförmiger Projektion. a) Das Szenario. b) Ausschnittsvergrößerung: Ein Array von physikalischen Elementen als virtueller Sensor zur Vermessung von Abstand und Orientierung.

Roboterkoordinatensystems schon recht genau bekannt sind, ist jeweils nur ein schmaler Winkelbereich abzutasten. Es reicht also pro Array ein einziges physikalisches Sendeelement aus, welches mittig angeordnet wird. Das Prinzip der dynamischen Rekonfigurierung ist in der Abb. 3.13 dargestellt.

Landmarken mit linienförmiger Projektion auf die x/y–Ebene wie Wände, Schränke und Tischkanten werden bei der Konfigurierung des Sensorsystems den Landmarken mit punktförmiger Projektion wie Ecken und Tischbeinen vorgezogen. Weiterhin werden Landmarken bevorzugt, welche in einem geringen Abstand zum Roboter liegen. Die folgende Beschreibung des Algorithmus zur Konfigurierung des Systems in einer einfachen strukturierten Umgebung ist wieder auf Landmarken mit linienförmiger Projektion beschränkt. Das Verfahren für die Vermessung von Landmarken mit punktförmiger Projektion verläuft analog.

Zunächst wird vom Nominalwert $\underline{\hat{x}}_k^P$ der aktuellen prädizierten Roboterlage aus das Lot auf alle in der Nähe des Roboters befindlichen linienförmigen Landmarken gebildet. Für jede Landmarke ergibt sich damit der Lotaufpunkt $P_i,\ i = 1, \ldots, L$, Abb. 3.14. Die Landmarken werden zunächst gemäß ihres Abstandes vom Roboter sortiert. Beginnend mit der nächstliegenden Landmarke wird dann überprüft, ob 1. die reflektierende Seite dem Roboter zugewandt ist, 2. P_i innerhalb der Landmarkenabmessungen liegt und ob 3. P_i nicht verdeckt ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird der Landmarke ein virtueller Sensor zugewiesen, falls dieser nicht mit einem bereits konfigurierten Array überlappt. Das Array wird aus derjenigen Signalquelle, deren Hauptachse die kleinste Winkelabweichung vom Lot aufweist, sowie einer Anzahl von Mikrophonen zusammengestellt. In der Abb. 3.14 a) ist ein praxisnahes Beispiel für die Konfigurierung der Sensoren in einer einfachen strukturierten Umgebung dargestellt. Die Ausschnittsvergrößerung zeigt einen der virtuellen Sensoren.

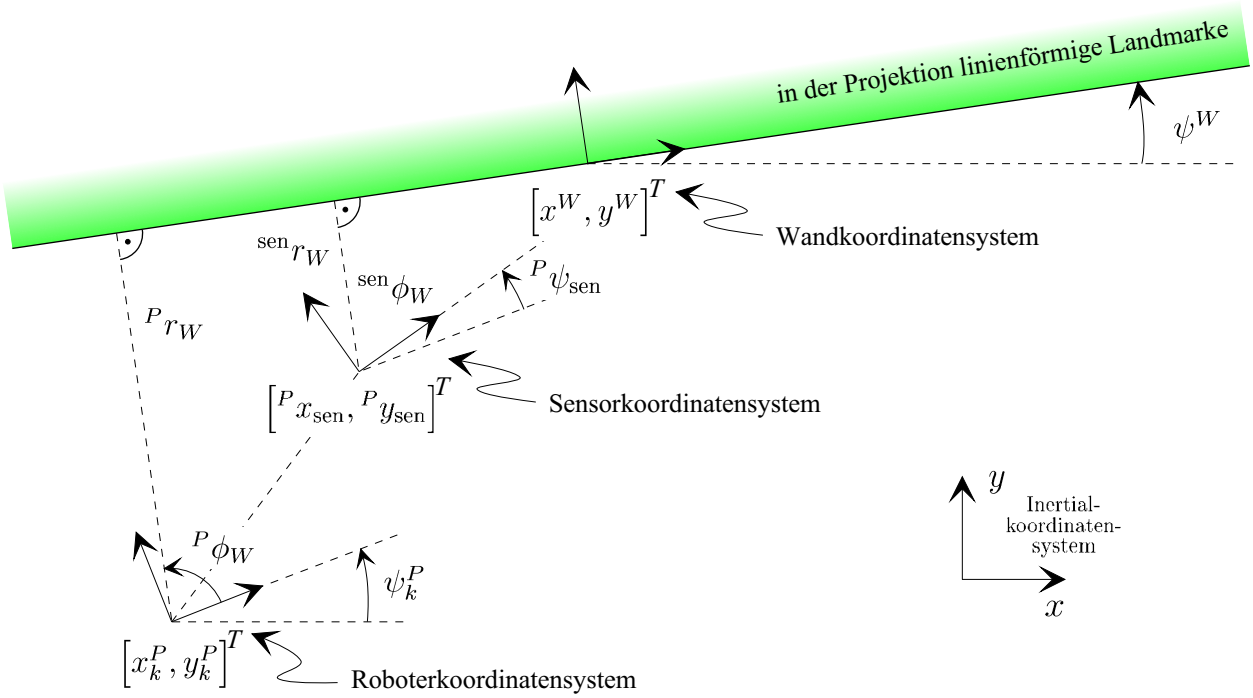


Abbildung 3.15: Zusammenhänge zwischen den Koordinatensystemen des Roboters, eines Sensor–Arrays und einer Wand.

In einer komplexen Umgebung ist es sinnvoll, die Konfigurierung des Systems nach erweiterten Kriterien vorzunehmen. Dabei liegt es auf der Hand, die Landmarken so auszuwählen, daß die Ausdehnung des Unsicherheitsgebiets der Roboterlage in denjenigen Richtungen reduziert wird, die für die Durchführung der Serviceaufgabe relevant sind. In rechtwinkliger Umgebung bringt ein solches Vorgehen allerdings keinen praktischen Vorteil, da nur zwei Richtungen zur Reduktion der Unsicherheit existieren, die mit dem betrachteten omnidirektionalen Sensorsystem immer unabhängig ausgewählt werden können.

3.6.2 Bildung von Meßhypothesen zur Vermeidung von Störungen

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie aus der prädizierten Roboterlage $\mathcal{X}_k^P$ zusammen mit der Umweltkarte automatisch eine Meßkonfiguration bestimmt wird, die für die Vermessung der im Einzugsbereich befindlichen Landmarken am besten geeignet ist. Zusätzlich wird nun für jeden Empfänger innerhalb eines virtuellen Sensors eine Hypothese über die zu erwartende Pulslaufzeit aufgestellt. Es ist somit ausreichend, Echos in einem schmalen Zeitfenster um den hypothetischen Wert zu detektieren.

Für die hypothetische Lage des erwarteten ebenen Reflektors bezüglich des Fahrzeugkoordinatensystems ergibt sich mit Abb. 3.15

$$\begin{aligned} {}^P r_W^{\text{hyp}} &= \left[\sin\left(\psi^W\right), -\cos\left(\psi^W\right)\right] \begin{bmatrix} x_k^P - x^W \\ y_k^P - y^W \end{bmatrix} \\ {}^P \phi_W^{\text{hyp}} &= \frac{\pi}{2} + \psi^W - \psi_k^P \quad , \end{aligned} \tag{3.7}$$

womit für die Lage des Reflektors in Sensorkoordinaten folgt

$$\begin{aligned} {}^{\text{sen}} r_W^{\text{hyp}} &= {}^P r_W^{\text{hyp}} - {}^P x_{\text{sen}} \cos\left({}^P \phi_W^{\text{hyp}}\right) + {}^P y_{\text{sen}} \sin\left({}^P \phi_W^{\text{hyp}}\right) \\ {}^{\text{sen}} \phi_W^{\text{hyp}} &= {}^P \phi_W^{\text{hyp}} - {}^P \psi_{\text{sen}} \quad . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Für N Empfänger erhält man mit (4.19) zu erwartende Meßwerte

$$R_i^{\mathrm{hyp}} = \sqrt{\left\{C_i^x - 2\ {}^{\mathrm{sen}}r_W^{\mathrm{hyp}} \cos\left({}^{\mathrm{sen}}\phi_W^{\mathrm{hyp}}\right)\right\}^2 + \left\{C_i^y - 2\ {}^{\mathrm{sen}}r_W^{\mathrm{hyp}} \sin\left({}^{\mathrm{sen}}\phi_W^{\mathrm{hyp}}\right)\right\}^2} \tag{3.9}$$

$i = 1, \ldots, N$. Unter Berücksichtigung von Unsicherheiten in der prädizierten Roboterlage, der angenommenen Lage $\underline{x}^W$ des ebenen Reflektors und den Meßfehlergrenzen lassen sich somit Amplitudengrenzen für R_i^{hyp} gemäß $R_i^{\mathrm{hyp}} \in \mathcal{R}_i^{\mathrm{hyp}}$ angeben, wobei das Intervall $\mathcal{R}_i^{\mathrm{hyp}}$ durch

$$\mathcal{R}_i^{\mathrm{hyp}} = \left\{R_i^{\mathrm{hyp}} : \left|R_i^{\mathrm{hyp}} - \hat{R}_i^{\mathrm{hyp}}\right| < \delta_i^{\mathrm{hyp}}\right\}$$

gegeben ist. Der Nominalwert oder Mittelpunkt des Intervalls $\hat{R}^{\mathrm{hyp}}$ und die halbe Intervallbreite δ_i^{hyp} ergeben sich durch Einsetzen der Lagemengen $\mathcal{X}^W$, $\mathcal{X}_k^P$ in die Gleichungen (3.7) bis (3.9).

Aus dem Nominalwert $\hat{R}^{\mathrm{hyp}}$ der hypothetischen Meßdistanz für den Empfänger i in einem virtuellen Sensor errechnet sich zu jedem Zeitpunkt k die prädizierte Pulslaufzeit T_k^P gemäß

$$T_k^P = \frac{\hat{R}^{\mathrm{hyp}}}{c} \ ,$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Die halbe Fensterbreite T_k^F ergibt sich zu

$$T_k^F = \frac{\delta^{\mathrm{hyp}}}{c} \ ,$$

wobei hier zur Vereinfachung der Index i zur Bezeichnung des Empfängers i fortgelassen wurde.

Zusätzlich wird noch die Totzeit T^{tot} benötigt, die aus der Beeinflussung der Empfänger über den direkten Pfad durch den Sender resultiert. In dieser kurzen Zeit nach dem Senden ist die Detektion eines Echos nicht möglich.

Bei Verwendung von Standardmeßverfahren ergibt sich die in Abb. 3.16 a) dargestellte Meßsequenz, welche die geringe Auslastung des Meßkanals Sender $\longrightarrow$ Objekt $\longrightarrow$ Empfänger verdeutlicht. Im nächsten Abschnitt wird ein Zeitmultiplex–Verfahren zur besseren Auslastung des Meßkanals vorgestellt.

3.6.3 Zeitmultiplex–Verfahren zur Erhöhung der Meßrate

Zur Erhöhung der Meßrate werden in die ungenutzten Zeitschlitze des Meßkanals weitere Meßsequenzen eingeschoben. Arbeiten N Standardmeßsequenzen parallel, so wird dies als N–faches Zeitmultiplex–Verfahren bezeichnet [111]. Dieses Vorgehen ist in der Abb. 3.16 für zwei– und dreifache Zeitmultiplex–Verfahren beispielhaft dargestellt.

Für die Anwendung eines N–fachen Zeitmultiplex–Verfahrens muß der Zeitschlitz zwischen Senden und Empfangen mindestens $N-1$ weitere Meßsequenzen aufnehmen, d.h. es muß gelten

$$\boxed{T^P > N\,T^{tot} + (2N-1)\,T^F}$$

Die Meßsequenzen in der Abb. 3.16 sind mit nichtäquidistanter Abtastung dargestellt, um diese Bedingung augenfällig zu machen. Durch einen zeitlichen Versatz der eingeschobenen

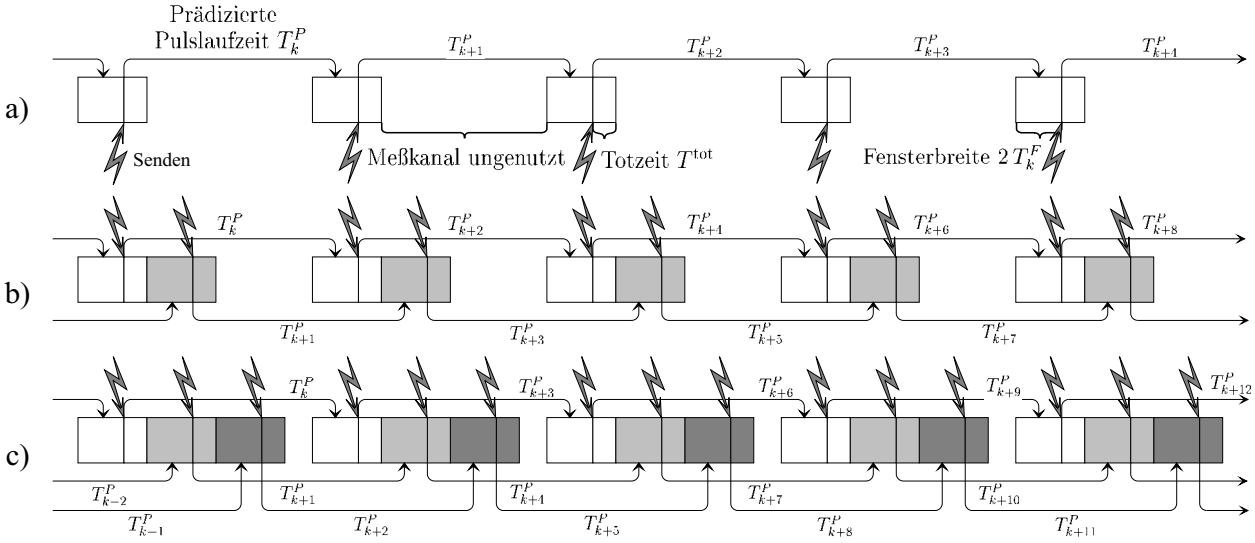


Abbildung 3.16: Darstellung verschiedener Meßsequenzen zur Herleitung der Zeitmultiplex–Meßverfahren: a) Schnellstes Standardmeßverfahren ohne Überlappung von Meßsequenzen. b) Zweifache, c) dreifache Verschachtelung von Meßsequenzen in Zeitmultiplex–Verfahren.

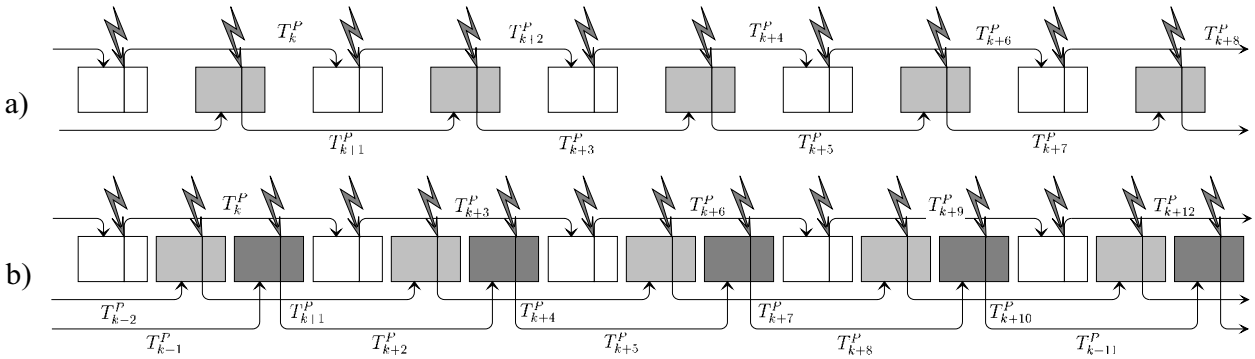


Abbildung 3.17: Zeitmultiplex–Meßverfahren aus Abb. 3.16 dargestellt mit gleichmäßiger Abtastung: a) zweifache, b) dreifache Verschachtelung von Meßsequenzen.

Meßsequenzen kann aber eine gleichmäßige Abtastung erreicht werden, die für die praktische Anwendung besser geeignet ist, Abb. 3.17.

Als Meßrate für die in den Abbildungen 3.16 und 3.17 dargestellten Zeitmultiplex–Verfahren ergibt sich

$$R_{meß} = \frac{N}{T^P + T^F} \quad .$$

Für ein Luftultraschallsystem vereinfacht sich dieser Ausdruck bei einer Temperatur von 293 K, einer Totzeit $T^{tot} = 1.5$ ms und einer Fensterbreite von $2\,T^F = 0.6$ ms (= 20 cm) zu

$$R_{meß} \approx \frac{N}{\frac{d}{d_0} + T^F}\,,\; d_0 = 171.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

wobei d der Objektabstand in mm ist. Die Meßrate ist in der Abb. 3.18 für verschiedene N in Abhängigkeit vom Objektabstand dargestellt. Die durchgezogene Linie gilt für den Fall, daß jeweils die maximale Anzahl an parallelen Meßsequenzen verwendet wird.

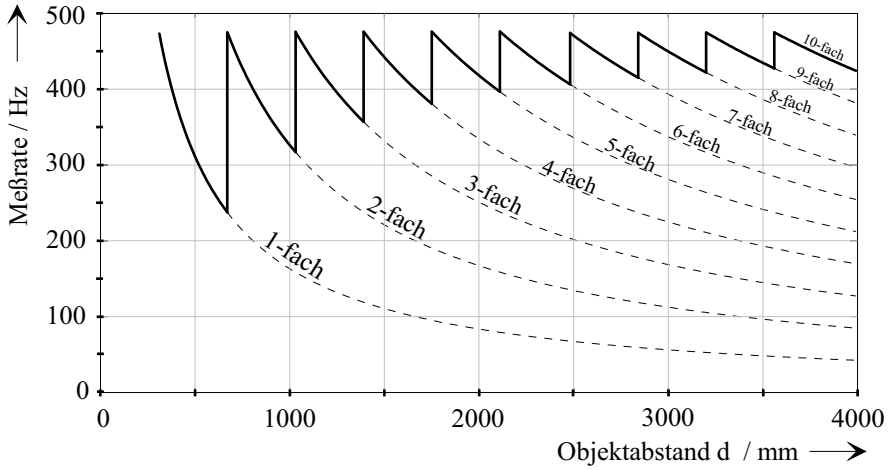


Abbildung 3.18: Meßrate für ein Luftultraschallsystem nach den in den Abbildungen 3.16 und 3.17 dargestellten Zeitmultiplex–Verfahren bei einer Temperatur von 293 K, einer Totzeit $T^{tot} = 1.5$ ms und einer Fensterbreite von $2\,T^F = 0.6$ ms.

Vereinfachtes Zeitmultiplex–Meßverfahren

Das in der Abb. 3.17 dargestellte Zeitmultiplex–Meßverfahren kann mit geringen Einbußen in der Datenrate so vereinfacht werden, daß es auch mit einfachen, handelsüblichen Distanzsensoren eingesetzt werden kann. Zu diesem Zweck wird die Forderung aufgegeben, daß die unterlagerten Standardmeßsequenzen nahtlos aneinander anschließen. Statt dessen wird gefordert, daß die Empfangsfenster direkt an die Totzeitfenster anschließen. Das daraus resultierende, vereinfachte Zeitmultiplex–Meßverfahren ist in der Abb. 3.19 dargestellt. Die Meßrate ist dabei etwas geringer als bei den in den Abbildungen 3.16 und 3.17 dargestellten Verfahren und durch

$$R_{meß} = \frac{N-1}{T^P - T^{tot} - T^F}$$

gegeben. Die Meßrate für ein Luftultraschallsystem bei einer Temperatur von 293 K, einer Totzeit $T^{tot} = 1.5$ ms und einer Fensterbreite von $2\,T^F = 0.6$ ms in Abhängigkeit vom Objektabstand ist in der Abb. 3.20 dargestellt. Die durchgezogene Linie gilt wieder für den Fall, daß jeweils die maximale Anzahl an parallelen Meßsequenzen für den gegebenen Abstand verwendet wird.

3.6.4 Sensor–Arrays zur Vermessung von Umweltmerkmalen

Aus dem Meßvorgang ergeben sich zu jedem Zeitpunkt N Distanzen R_i, $i = 1, \ldots, N$. Diese gemessenen Distanzen R_i werden nun mit den hypothetischen Distanzen R_i^{hyp} verglichen. Diejenigen R_i, welche in der Menge der hypothetischen $\mathcal{R}_i^{\mathrm{hyp}}$ liegen, d.h. $R_i^{\mathrm{hyp}} \in \mathcal{R}_i^{\mathrm{hyp}}$, können zur Bestimmung der Lage des ebenen Reflektors herangezogen werden. Die Lagebestimmung geschieht mit Hilfe eines in Kapitel 4, Abschnitt 4.2 noch vorzustellenden Verfahrens. Als Ergebnis erhält man eine Menge möglicher Lagen ${}^M r_w$, ${}^M \phi_w$ einer Landmarke bezüglich des Roboterkoordinatensystems. Die exakte Menge wird wieder durch eine elliptische Menge

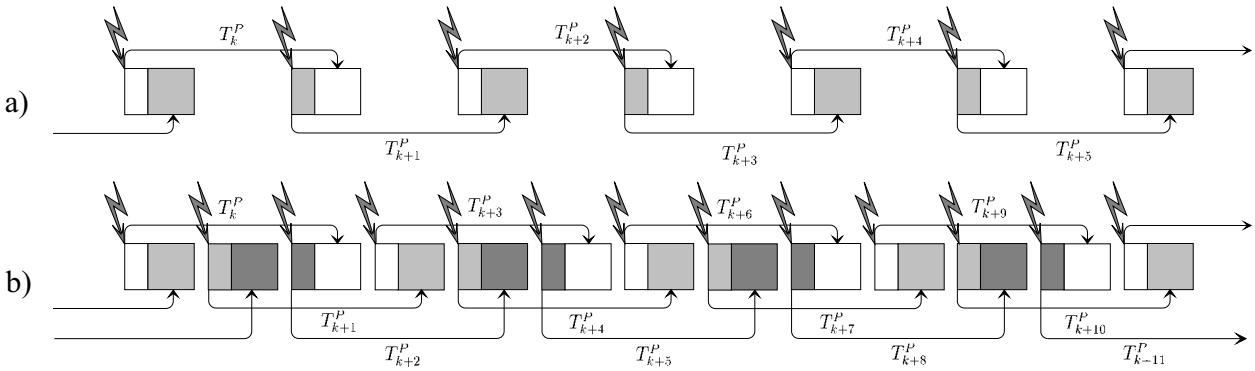


Abbildung 3.19: *Vereinfachtes* Zeitmultiplex–Meßverfahren mit gleichmäßiger Abtastung: a) zweifache, b) dreifache Verschachtelung von Meßsequenzen.

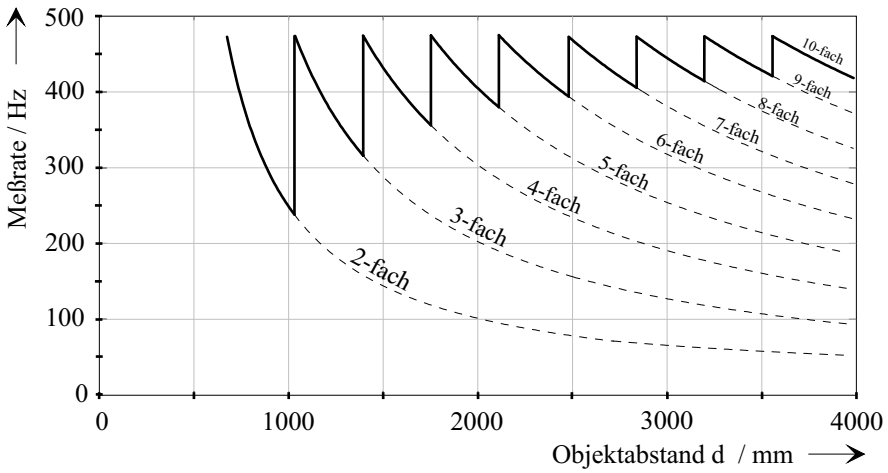


Abbildung 3.20: Meßrate für ein Luftultraschallsystem nach dem in der Abb. 3.19 dargestellten *vereinfachten* Zeitmultiplex–Verfahren bei einer Temperatur von 293 K, einer Totzeit $T^{tot} = 1.5$ ms und einer Fensterbreite von $2\,T^F = 0.6$ ms.

approximiert und ist gegeben als

$$
{}^M\mathcal{S}_W = \Bigg\{ \left[{}^M r_W, {}^M\phi_W\right]^T : \\
\left[{}^M r_W - {}^M\hat{r}_W, {}^M\phi_W - {}^M\hat{\phi}_W\right]^T \left({}^M\mathbf{S}_W\right)^{-1} \left[{}^M r_W - {}^M\hat{r}_W, {}^M\phi_W - {}^M\hat{\phi}_W\right] \leq 1 \Bigg\} \; .
$$

Den Mittelpunkt $\left[{}^M\hat{r}_W, {}^M\hat{\phi}_W\right]^T$ und die Definitionsmatrix ${}^M\mathbf{S}_W$ der Ellipse erhält man nach einigen Transformationen aus den kartesischen Lagemengen in Abschnitt 4.2.

3.6.5 Roboterlage aus gemessener Landmarkenlage

Im letzten Abschnitt wurde die Lage ${}^M r_W$, ${}^M\phi_W$ einer Landmarke bezüglich des Roboterkoordinatensystems aus der Messung bestimmt. Zusammen mit dem Modell dieser Landmarke kann nun die Menge aller Roboterlagen bestimmt werden, welche kompatibel mit

der Messung sind. Die durch die Messung definierte Roboterlage zum Zeitpunkt k wird mit $\underline{x}_k^M = \left[x_k^M, y_k^M, \psi_k^M\right]^T$ bezeichnet. Mit Abb. 3.15 ist die exakte Lagemenge durch

$$\mathcal{X}_k^M = \left\{ \underline{x}_k^M : {}^M r_W = \left[\sin\left(\psi^W\right), -\cos\left(\psi^W\right)\right] \begin{bmatrix} x_k^M - x^W \\ y_k^M - y^W \end{bmatrix}, \; {}^M\phi_W = \frac{\pi}{2} - \left\{\psi_k^M - \psi^W\right\} \right.$$
$$\left. \left[{}^M r_W, {}^M\phi_W\right]^T \in {}^M\mathcal{S}_W, \; \underline{x}^W \in \mathcal{X}^{\mathrm{LM}} \right\} \tag{3.10}$$

gegeben, weist aber bei Berücksichtigung von Fehlern in der Landmarkenlage eine komplexe Berandung auf. Die exakte Menge $\mathcal{X}_k^M$ wird nun durch eine *tubus*förmige Menge gemäß

$$\mathcal{X}_k^M \approx \left\{ \underline{x}_k^M : \underline{z}_k = \mathbf{H}_k \, \underline{x}_k^M + \underline{e}_k, \; \underline{e}_k \in \mathcal{E}_k, \; \mathbf{H}_k \in \mathcal{M}_{2,3} \right\}$$

approximiert. $\underline{z}_k$, $\mathbf{H}_k$ und $\mathcal{E}_k$ ergeben sich aus (3.10) durch eine Perturbationsanalyse erster Ordnung.

3.6.6 Fusion einer Messung mit der prädizierten Roboterlage

Jede Messung zu einer ebenen Landmarke bindet die Unsicherheit des Roboters nur in zwei Freiheitsgraden: Den Abstand des Roboters zur Landmarke und seine Orientierung. Zur Fusion der Roboterlagemenge, welche sich aus der Messung ergibt, mit der Menge prädizierter Roboterlagen wird das Verfahren aus Abschnitt 2.6 verwendet. Dabei handelt es sich in dem hier vorliegenden Fall um eine zweidimensionale Messung, d.h. $M = 2$, und einen dreidimensionalen Zustandsvektor, d.h. $N = 3$.

3.6.7 Zusammenfassung

Das Verfahren zur rekursiven Lokalisierung eines mobilen Roboters durch die Fusion der Information eines Distanzsensor–Arrays mit Koppelnavigationsdaten ist in der Abb. 3.21 zusammengefaßt. Die Konfigurierung des Arrays in Abhängigkeit von der aktuellen Situation geschieht parallel dazu mit einem niedrigeren Takt, da sich die Lage der Umweltmerkmale bezüglich des Roboters verglichen mit den Distanzmeßwerten nur langsam ändert.

3.7 Fusion der Daten des Multisensorsystems

3.7.1 Vorteile eines Multisensorsystems

In dem betrachteten Multisensorsystem, welches aus Geometriesensoren wie einem Winkelmeßsystem und mehreren Distanzsensor–Arrays sowie einem Koppelnavigationssystem besteht, treten konkurrierende Schätzungen der Roboterlage auf. Die Fusion der Informationen der einzelnen Geometriesensoren mit Koppelnavigationsdaten wurde bereits in den letzten beiden Abschnitten dargestellt. Die Situation verkompliziert sich, wenn die Daten mehrerer der zur Verfügung stehenden Sensoren zur Lokalisierung genutzt werden, da die Daten asynchron mit unterschiedlichen mittleren Abtastraten bereitgestellt werden und in der Regel voneinander abweichen, häufig sogar inkonsistent sind [75].

Der Gewinn durch die Verwendung eines Multisensorsystems verglichen mit einem einzigen Sensor liegt in der Erhöhung von Genauigkeit sowie Zuverlässigkeit der Lageschätzung durch sowohl redundante als auch einander ergänzende Umweltinformationen. Gleichzeitig

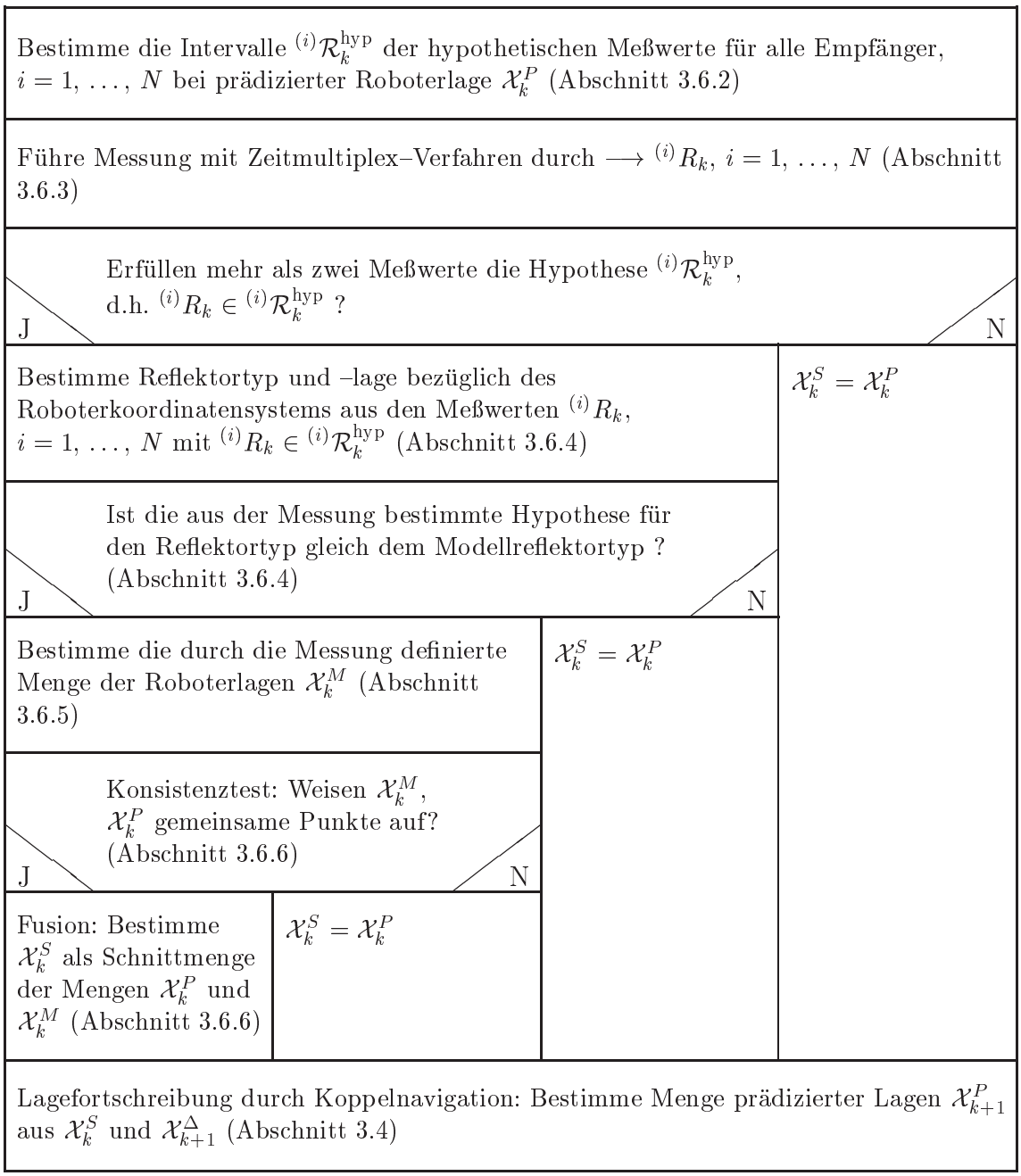


Abbildung 3.21: Zusammenfassung des Verfahrens zur rekursiven Lokalisierung eines mobilen Roboters durch Fusion der Messungen eines Distanzsensor–Arrays mit Koppelnavigationsdaten (ein Takt).

wird eine höhere Datenrate erzielt und die Verwendung einfacher und damit preiswerter Sensoren unterstützt [77].

Redundante Information wird durch die Lokalisierung eines Merkmals mit mehreren Sensoren geliefert. Im vorliegenden Sensorsystem werden bei der Konfigurierung eines Distanzsensor–Arrays, welches zur Vermessung eines bestimmten Umweltmerkmals dient, deutlich mehr als die minimal erforderliche Sensoranzahl verwendet. Durch Ausnutzung der entstehenden Redundanz, vgl. Kapitel 4, kann das Merkmal genauer lokalisiert werden, wobei auch eine höhere Zuverlässigkeit im Fall von Fehlmessungen oder Sensorausfällen erreicht wird.

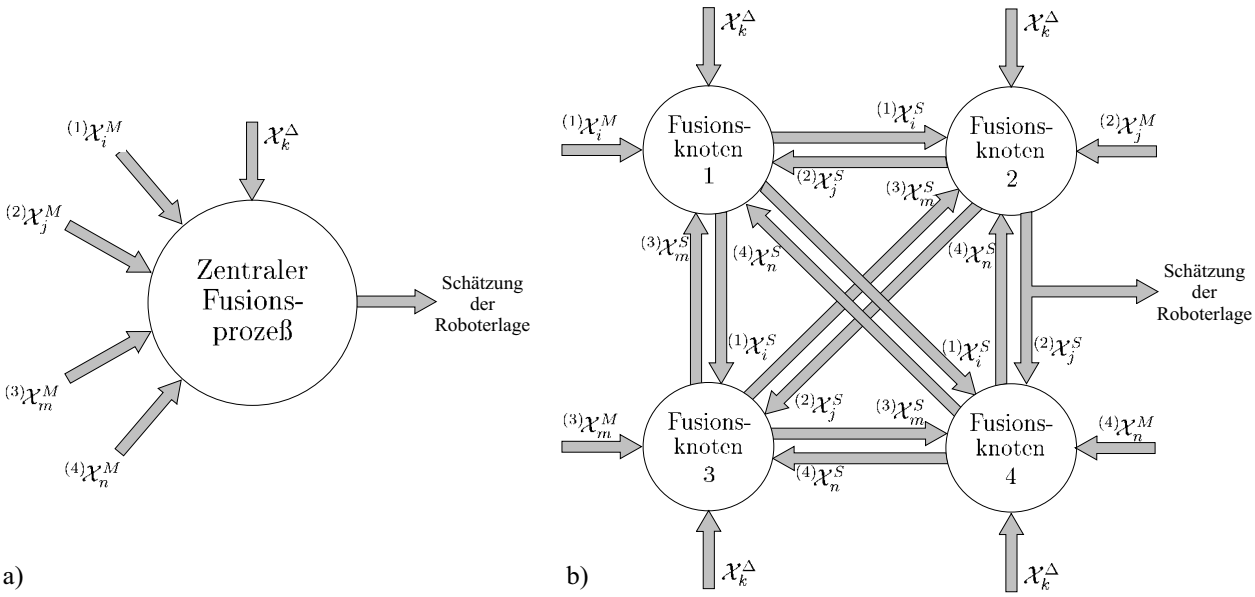


Abbildung 3.22: Zwei Verfahren zur Fusion in Multisensorsystemen am Beispiel von vier Geometriesensoren: a) Zentrale Fusion. b) Dezentrale Fusion. $\mathcal{X}_k^{\Delta}$ ... Koppelnavigationsinkrement zum Zeitpunkt k. $\mathcal{X}_k^{M}$ ... Durch Messung definierte Roboterlagemenge. $\mathcal{X}_k^{S}$ ... Menge geschätzter Roboterlagen.

Einander ergänzende Informationen, welche nicht gleichzeitig von einem einzelnen Sensor bereitgestellt werden können, lassen sich in zwei Fälle unterteilen: In einem Fall lokalisieren gleichartige Sensoren jeweils Merkmale vom gleichen Typ, wobei ein einzelnes Merkmal möglicherweise nicht zur vollständigen Bestimmung der Roboterlage ausreicht. In dieser Form ergänzen sich die verschiedenen Distanzsensor–Arrays, da ein einzelnes Array zusammen mit dem ihm zugeordneten Merkmal nur zwei Freiheitsgrade des Roboters binden kann, was zur Lokalisierung nicht ausreicht. Im anderen Fall vermessen verschiedenartige Sensoren unterschiedliche Merkmale. Damit ist zum einen eine Lokalisierung auch dann möglich, wenn bestimmte Merkmale fehlen. Zum anderen kann bei gleichzeitigen Vorliegen der unterschiedlichen Merkmale die Lokalisierungsgenauigkeit durch Fusion erhöht werden, und Fehlmessungen lassen sich leichter detektieren. Dieser Vorteil wird im betrachteten Multisensorsystem durch die Verwendung von sowohl Winkel– als auch Distanzsensoren erreicht, welche verschiedenartige Umweltmerkmale mit unterschiedlichen Meßprinzipien lokalisieren.

Die Datenrate ist bei der Verwendung mehrerer Sensoren höher als bei einem einzigen Sensor, da zum einen die Einzelsensoren ihre Meßaufgaben parallel erfüllen und zum anderen der jeweilige Einzelsensor wegen seines eingeschränkten Aufgabengebiets schneller arbeiten kann. Ein zusätzlicher Geschwindigkeitsvorteil ist durch die parallele Verarbeitung der anfallenden Sensordaten möglich.

Das eingeschränkte Aufgabengebiet eines Einzelsensors erlaubt weiterhin die Verwendung einfacher Sensoren. Dies ist wegen des geringeren Einzugsbereichs und einer Spezialisierung der Meßfähigkeiten auf bestimmte Merkmale möglich.

3.7.2 Dezentrale Fusion der Sensordaten

Zur Fusion der Sensordaten kommt entweder ein zentrales oder ein dezentrales Schema in Frage [73, 77, 78]. Zunächst wird die zentrale Fusion der Daten von N Sensoren in Abb. 3.22 a) betrachtet. Die einzelnen Sensoren senden ihre Messungen zu einem zentralen Fusionsprozeß,

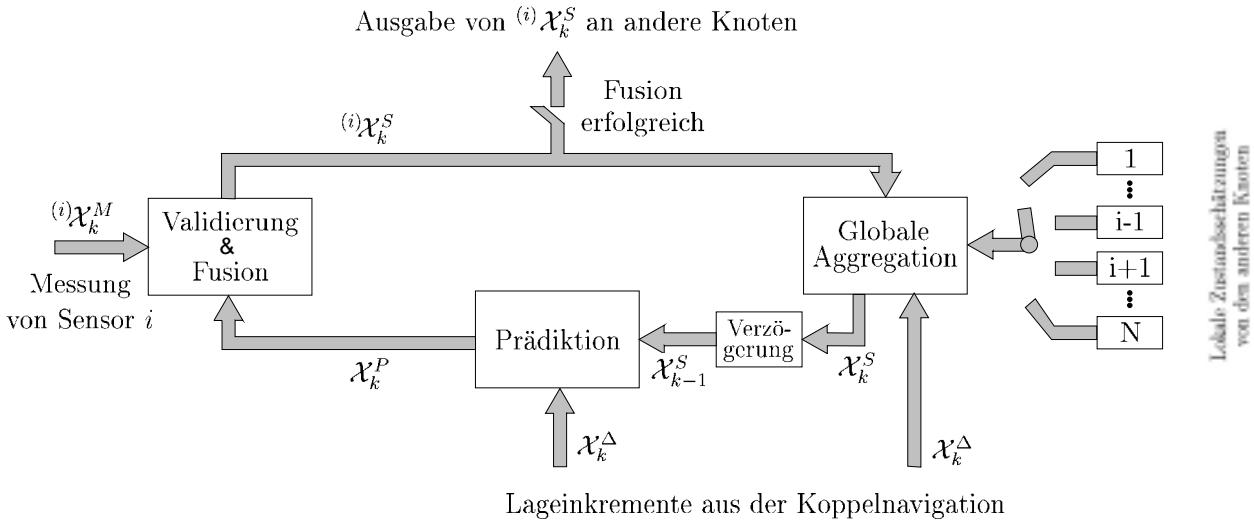


Abbildung 3.23: Schema eines Fusionsknotens der dezentralen Fusion aus Abb. 3.22 b).

welcher eine zentrale Prädiktion durchführt und die Messungen mit dieser Prädiktion fusioniert. Ist dieser zentrale Fusionsprozeß zu langsam, gehen Messungen verloren. Weiterhin ist das System nicht ohne weiteres skalierbar, da beim Hinzufügen weiterer Sensoren auch die Verarbeitungsleistung des Fusionsprozesses zunehmen muß. Bei einer Störung im zentralen Fusionsprozeß bricht das ganze System zusammen.

Ein Schema zur dezentralen Fusion ist in Abb. 3.22 b) dargestellt. Jeder der obengenannten Geometriesensoren bekommt einen Fusionsknoten zugeteilt, welcher Prädiktion, Datenvalidierung und die eigentliche Fusion durchführt. Zur globalen Aggregation werden die lokalen Zustandsschätzungen, welche als ${}^{(i)}\mathcal{X}^S$, $i = 1, \ldots, N$ bezeichnet werden, unter den Knoten ausgetauscht. Diese Kommunikation wird auf ein Minimum reduziert, indem von jedem Knoten aus nur dann Daten versendet werden, wenn eine erfolgreiche Fusion stattgefunden hat. Ein Knoten benötigt daher nur die Rechenleistung, welche 1. zur Verarbeitung der Daten des ihm zugeordneten Sensors und 2. zur gelegentlichen globalen Aggregation erforderlich ist. Die insgesamt benötigte Rechenleistung ist damit natürlich höher als bei einem zentralisierten System.

Die Funktionsweise eines einzelnen Knotens des hier vorgeschlagenen dezentralen Fusionsnetzwerks ist in der Abb. 3.23 gezeigt: Eine einzelne Messung ${}^{(i)}\mathcal{X}_k^M$ des zugeordneten Sensors i wird schnellstmöglich mit dem prädizierten Zustand ${}^{(i)}\mathcal{X}_k^P$ fusioniert. Dabei wird das Verfahren aus Abschnitt 2.6 verwendet. Bei erfolgreicher Fusion wird die lokale Schätzung ${}^{(i)}\mathcal{X}_k^S$ an die anderen Knoten weitergegeben, wobei auch mitgeteilt wird, bis zu welchem Koppelnavigationsinkrement die Prädiktion fortgeschritten ist. Nachrichten von anderen Knoten werden gepuffert, aber beim Eintreffen einer neuen Nachricht vom gleichen Knoten überschrieben. Damit wird die Aggregation der jeweils aktuellen lokalen Schätzungen der anderen Knoten gewährleistet. Diese globale Aggregation wird mit dem Verfahren aus Abschnitt 2.4 durchgeführt.

Trifft am jeweils betrachteten Knoten eine Zustandsschätzung von einem anderen Knoten ein, welche noch nicht die gleiche Anzahl an Lageinkrementen beinhaltet, so wird sie vor der Aggregation auf den gleichen Stand gebracht. Damit wird sichergestellt, daß immer nur Lageschätzungen kombiniert werden, die mit der gleichen Anzahl von Lageinkrementen fortgeschrieben wurden. Die Inkremente der Koppelnavigation werden deshalb in einem Ringpuffer gespeichert, wo sie allen Fusionsknoten zur Verfügung stehen.

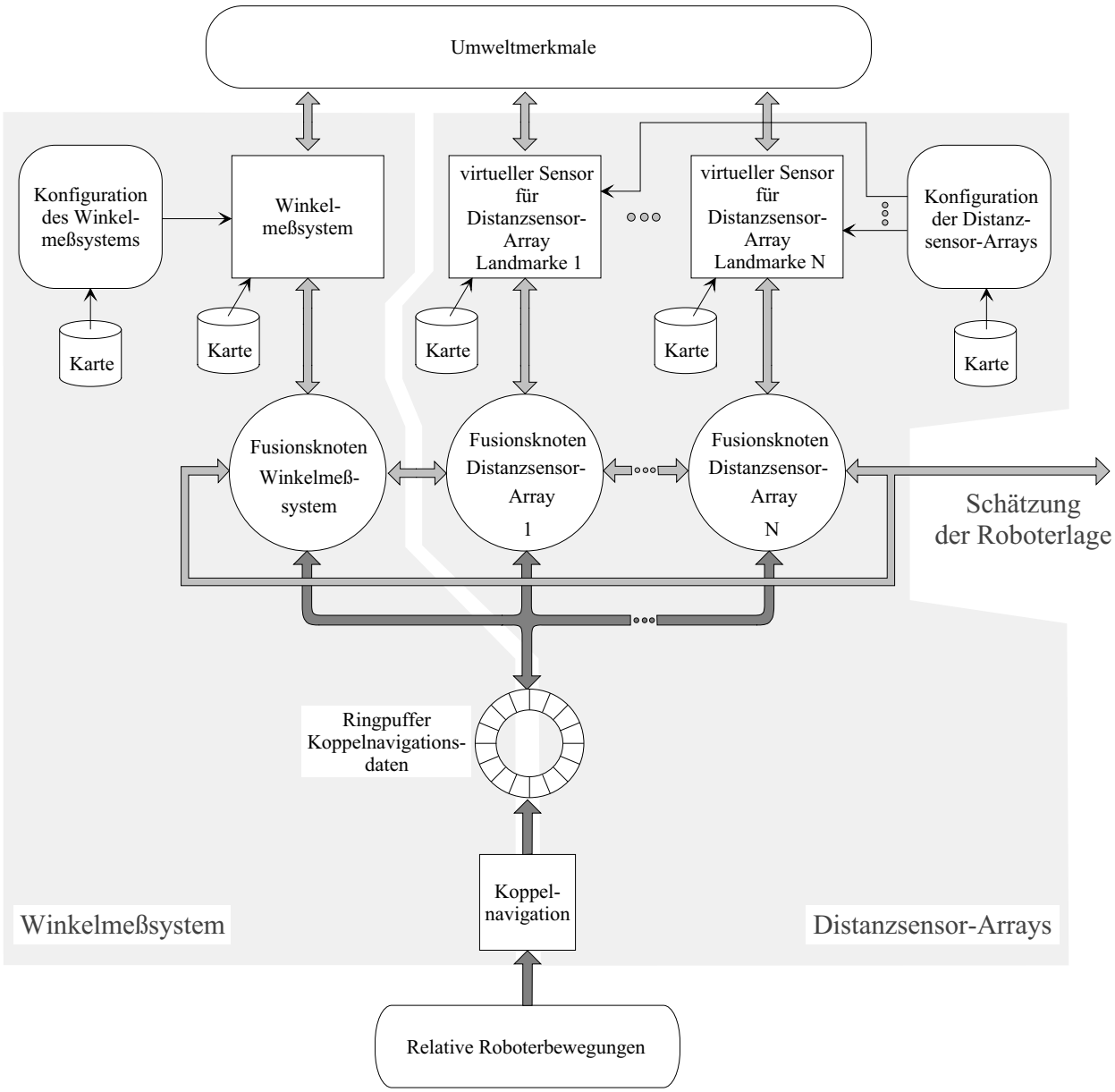


Abbildung 3.24: Schematische Gesamtübersicht zur rekursiven Lokalisierung eines mobilen Roboters mit Hilfe eines Winkelmeßsystems und Distanzsensor–Arrays.

Die dargestellte Schleife wird nun ständig durchlaufen. Wenn an einer der drei Stationen Prädiktion, Datenvalidierung & Fusion und globale Aggregation keine neue Information vorhanden ist, wird sofort die nächste bearbeitet. Die globale Aggregation bearbeitet in einem Durchlauf nur jeweils eine Nachricht eines anderen Knotens, um 1. die eigenen Messungen möglichst „frisch“ zu verarbeiten und um 2. ständig eine aktuelle Prädiktion der Roboterlage vorzuhalten.

Bemerkung 3.1 Der Abgriff der Zustandsschätzung kann an jedem beliebigen Knoten des Fusionsnetzwerks geschehen, da jeder einzelne Fusionsknoten eine globale Aggregation durchführt. Durch die gezielte Störung dieser Aggregation ergibt sich eine elegante Möglichkeit zur vergleichenden Evaluierung von Teilen des Multisensorsystems: Einige geeignete Verbindungen zwischen den Fusionsknoten werden aufgetrennt, wodurch sich autarke Subsensorsysteme bilden. Deren Daten können dann aufgezeichnet und verglichen werden.

3.7.3 Gesamtübersicht zur rekursiven Lokalisierung

Wird das Konzept der mengenbasierten, dezentralen Fusion von Daten eines Multisensorsystems auf das Problem der Lokalisierung eines mobilen Roboters mit Hilfe eines Winkelmeßsystems sowie Distanzsensoren angewendet, so ergibt sich die in Abb. 3.24 dargestellte Gesamtübersicht.

Die einzelnen Sensoren arbeiten nach den bereits beschriebenen Prinzipien: Der Meßvorgang des Winkelmeßsystems wurde in Abschnitt 3.5 beschrieben, dessen Konfigurierung in Abschnitt 3.5.1. Zusätzlich werden virtuelle Sensoren auf der Basis der in Abschnitt 3.6.1 diskutierten Arrays von Distanzsensoren eingesetzt. Deren Konfiguration übernimmt ein in Abschnitt 3.6.1 beschriebener nebenläufiger Prozeß, wobei in einem Array jeweils mehr Elemente als unbedingt notwendig verwendet werden. Durch die Ausnutzung der entstehenden Redundanz wird eine präzise Lokalisierung von Umweltmerkmalen erreicht.

Durch die Sensoreinsatzplanung werden die (begrenzten) Fähigkeiten des Sensorsystems optimal in der aktuellen Situation eingesetzt. Weiterhin werden wegen der komplementären Eigenschaften der verschiedenen Sensoren unterschiedliche Umweltmerkmale zur Lokalisierung herangezogen. Dadurch wird im Vergleich zu einem einzelnen Sensor eine höhere Genauigkeit erzielt und es ergibt sich ein erweiterter Arbeitsbereich.

Alle eingesetzten Sensoren liefern die berechneten Roboterlagemengen an die ihnen zugeordneten Fusionknoten, wobei diesen zusätzlich die letzten Koppelnavigationsinkremente über einen gemeinsamen Puffer zur Verfügung stehen. Durch die Koppelnavigationsdaten wird die Lageschätzung geglättet und eine genauere Prädiktion von Umweltmerkmalen ermöglicht.

Insgesamt ergibt sich eine hohe Meßrate, da das Winkelmeßsystem und mehrere Distanzsensor–Arrays parallel arbeiten. Dies ist vor allem bei hohen Robotergeschwindigkeiten vorteilhaft.

Wesentliche Ergebnisse des Kapitels

In diesem Kapitel wurde ein integriertes Verfahren zur Initialisierung und rekursiven Stützung der Schätzung der Lage eines mobilen Roboters mit Hilfe eines Multisensorsystems vorgestellt. Die betrachtete Klasse von Robotern ist mit Sensoren zur Bestimmung von Lageänderungen ausgestattet; als Geometriesensoren stehen ein Winkelmeßsystem und ein Distanzsensor–Array zur Verfügung.

Zur Initialisierung der Roboterlage wurde ein einfaches, aber effektives Verfahren vorgestellt, welches sich auf einem gemessenen Satz von $N > 3$ Winkeln zu bekannten, aber nicht unterscheidbaren Landmarken abstützt. Verdeckungen und im Gegensatz zu [23, 26] auch Fehlmessungen werden toleriert und das Verfahren kann auch in nichtkonvexen Räumlichkeiten eingesetzt werden. Weiterhin kann Vorwissen über die Roboterlage genutzt werden, um den Initialisierungsprozeß zu beschleunigen.

Während der Fahrt wird die initiale Roboterlage durch ein Koppelnavigationsverfahren fortgeschrieben. Hier wurde neben der allgemeinen Vorgehensweise auch ein speziell auf omnidirektionale Roboter zugeschnittenes Verfahren gezeigt, welches auch systematische Fehler bei der inkrementellen Lageschätzung berücksichtigt. Koppelnavigationsverfahren leiden prinzipbedingt unter akkumulierenden Fehlern, so daß die geschätzte Roboterlage laufend durch die Daten beider Geometriesensoren gestützt werden muß. Hierzu wurde eine Methode zur rekursiven Lageschätzung in schneller Fahrt vorgeschlagen, welche jeweils die aktuelle Lageprädiktion zur Sensoreinsatzplanung nutzt. Sensoreinsatzplanung bedeutet hier konkret eine Konfigurierung des Sensorsystems in Abhängigkeit von der aktuellen Umgebung zur

Fokussierung der Messungen auf erwartete Umweltmerkmale. Dieses Vorgehen steigert die Robustheit der Lageschätzung gegen Störungen und führt zu einer drastischen Erhöhung der Datenrate. Insbesondere wurde ein Zeitmultiplex–Meßverfahren entwickelt, welches mit einfachen Ultraschallsensoren Abtastraten von bis zu 450 Hz pro Landmarke zuläßt.

Zur Fusion der konkurrierenden Lageschätzungen verschiedener Sensoren in einem Multisensorsystem wurde ein dezentrales Fusionsschema vorgestellt. Dabei werden alle auftretenden Unsicherheiten mit Verfahren der mengenbasierten Zustandsschätzung behandelt. Diese Vorgehensweise ermöglicht den Entwurf von nichtlinearen Schätzern geringer Komplexität auch für den Fall, daß ein Zustand aus Beobachtungen geschätzt wird, welche durch systematische oder stark korrelierte Fehlerquellen gestört sind.

Kapitel 4

Effiziente Auswertung von Sensordaten

Einleitung

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 3 als gegeben vorausgesetzten, effizienten Algorithmen zur Verarbeitung von Sensordaten hergeleitet. Im ersten Teil wird ein Verfahren zur Bestimmung der Lage eines mobilen Roboters basierend auf *reinen* Winkelmessungen zu bekannten Landmarken vorgestellt. Der zweite Teil des Kapitels beschäftigt sich mit der Bestimmung von Landmarkenpositionen mit Hilfe von *reinen* Distanzmessungen, welche von einem Distanzsensor–Array beliebiger Geometrie geliefert werden.

Beide Problemstellungen führen zunächst auf nichtlineare, überbestimmte Gleichungssysteme, welche sich im allgemeinen nur durch iterative Verfahren lösen lassen. Im Rahmen dieser Arbeit ist es jedoch gelungen, diese nichtlinearen Gleichungssysteme derart zu transformieren, daß sie im Sinne kleinster Fehlerquadrate in geschlossener Form lösbar sind.

Die Anwendbarkeit der hier beschriebenen Algorithmen geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Es wird darum besonderer Wert darauf gelegt, daß dieses Kapitel eine abgeschlossene Einheit darstellt und eigenständig gelesen werden kann.

4.1 Effiziente Lagebestimmung mit Winkelmeßsystemen

4.1.1 Formulierung des Problems

Gegeben seien M Landmarken in einer zweidimensionalem Welt. Die Positionen $\underline{x}_i^{\mathrm{LM}} = \left[x_i^{\mathrm{LM}}, y_i^{\mathrm{LM}}\right]^T$, $i = 1, \ldots, M$ der Landmarken sind bekannt, aber mit additiven Fehlern $\Delta\underline{x}_i^{\mathrm{LM}} = \left[\Delta x_i^{\mathrm{LM}}, \Delta y_i^{\mathrm{LM}}\right]^T$ behaftet. Die wahren Landmarkenpositionen $\tilde{\underline{x}}_i^{\mathrm{LM}}$ werden jeweils als innerhalb einer Menge $\mathcal{X}_i^{\mathrm{LM}}$ befindlich modelliert

$$\mathcal{X}_i^{\mathrm{LM}} = \left\{\underline{x}_i^{\mathrm{LM}} : \underline{x}_i^{\mathrm{LM}} = \hat{\underline{x}}_i^{\mathrm{LM}} + \Delta\underline{x}_i^{\mathrm{LM}},\ \Delta\underline{x}_i^{\mathrm{LM}} \in \Delta\mathcal{X}_i^{\mathrm{LM}}\right\}\ , \tag{4.1}$$

welche um den Nominalwert $\hat{\underline{x}}_i^{\mathrm{LM}}$ zentriert ist. Auftretende Fehler $\Delta\underline{x}_i^{\mathrm{LM}}$ in den Landmarkenpositionen werden dabei als unbekannt, aber durch ein Ellipsoid

$$\Delta\mathcal{X}_i^{\mathrm{LM}} = \left\{\Delta\underline{x}_i^{\mathrm{LM}} : (\Delta\underline{x}_i^{\mathrm{LM}})^T(\mathbf{X}_i^{\mathrm{LM}})^{-1}\Delta\underline{x}_i^{\mathrm{LM}} \leq 1\right\}$$

gemäß $\Delta\underline{x}_i^{\mathrm{LM}} \in \Delta\mathcal{X}_i^{\mathrm{LM}}$ als in der Amplitude begrenzt angenommen. $\mathbf{X}_i^{\mathrm{LM}}$ stellt wieder die Definitionsmatrix des Ellipsoids gemäß Anhang B.1 dar.

Ein Beobachter bestimmt nun die Winkel zu diesen Landmarken in seinem lokalen Koordinatensystem gemäß Abb. 4.1. Durch Verdeckungseffekte werden $N \leq M$ Winkel α_i,

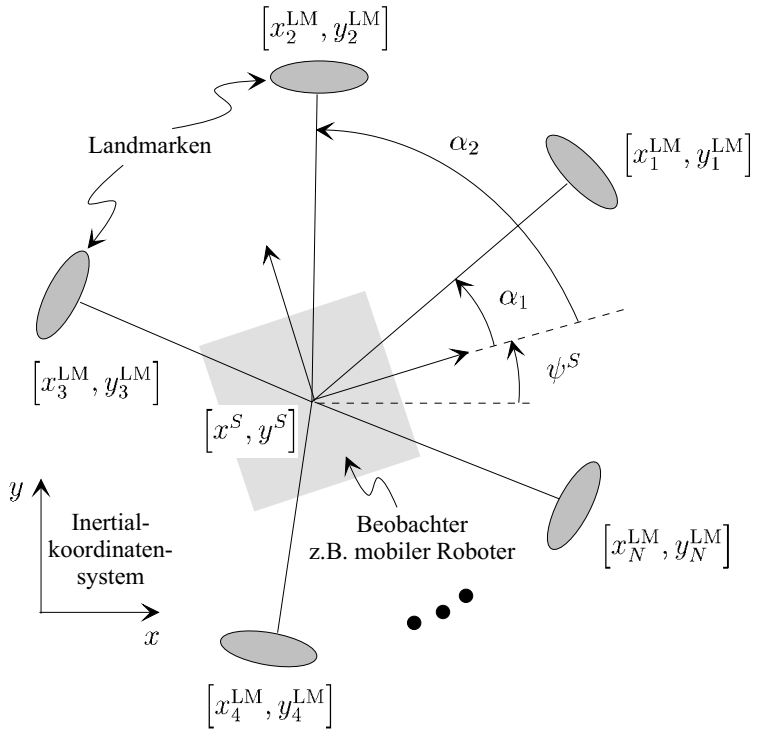


Abbildung 4.1: Messung der Winkel zu N bekannten Landmarken bezüglich des Beobachterkoordinatensystems.

$i = 1, \ldots, N$ gemessen, wobei die eindeutige Zuordnung von Winkeln zu Landmarken in diesem Kapitel als gegeben vorausgesetzt wird. Ein Verfahren zur Bestimmung der Zuordnung wurde bereits in Abschnitt 3.3 dargestellt.

Auch die Winkelmessungen seien durch additive Fehler gestört, d.h. es gilt $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$, mit

$$\mathcal{A}_i = \{\alpha_i : \alpha_i = \hat{\alpha}_i + \Delta\alpha_i\} \quad , \tag{4.2}$$

wobei $\hat{\alpha}_i$ den Meßwert darstellt und der Fehler $\Delta\alpha_i$ als unbekannt, aber amplitudenbegrenzt gemäß

$$|\Delta\alpha_i| < \sqrt{A_i}$$

angenommen wird, wobei $\sqrt{A_i}$ die halbe Breite des Intervalls $\mathcal{A}_i$ angibt.

Für einen gegebenen Satz von N gemessenen Winkeln, den Positionen von N Landmarken und eine gegebene Zuordnung von Winkeln zu Landmarken ist nun gesucht:

- ◇ Die Menge $\mathcal{X}^S$ aller Lagen des Beobachters $\underline{x}^S = \left[x^S, y^S, \psi^S\right]^T$, welche kompatibel mit den Messungen und den a priori gegebenen Amplitudengrenzen für sowohl Unsicherheiten in den Landmarkenpositionen als auch in den Winkelmessungen sind.

- ◇ Eine Entscheidung, ob die angenommene Zuordnung von gemessenen Winkeln zu den Landmarken plausibel ist.

4.1.2 Bekannte Ansätze

Im Fall von drei Landmarken existiert eine klassische, geschlossene Lösung, die z.B. in [23, 25] und [30] angewendet wird. Bei der Verwendung von nur drei Landmarken ziehen kleine Fehler in den Winkelmessungen oder den angenommenen Landmarkenpositionen aber eine drastische Verschlechterung der Lageschätzung nach sich. Da außerdem schon bei Abdeckung von nur einer Marke keine Lagebestimmung mehr möglich ist, ist grundsätzlich die Verwendung von mehr als drei Landmarken anzuraten. Weiterhin ist Redundanz auch dann erforderlich, wenn zwar ein Satz gemessener Winkel vorliegt, aber das Problem der Bestimmung der Korrespondenz zu Landmarken noch gelöst werden muß.

Für den Fall von $N > 3$ Landmarken wird in [27], [28] ein heuristisches Verfahren zur Auswahl der „besten“ drei Landmarken vorgestellt, welche dann zur Lokalisierung herangezogen werden. Einige Autoren schlagen die gewichtete Mittelung aller möglichen Tripel–Lösungen vor, was sehr rechenintensiv ist und die Schwierigkeit der Bestimmung der Gewichtungskoeffizienten mit sich bringt. Weit verbreitet sind auch iterative Lösungsverfahren [29, 21]. Diese sind zur Lösung des Lokalisierungsproblems ungeeignet, da erstens eine ausreichend gute Startlösung vorliegen muß, um Konvergenz zu erzielen, und zweitens die gewünschte Lösung nicht nach einem vorgegebenen Zeitraum zur Verfügung steht. In [22] wird deshalb eine geschlossene Lösung vorgestellt, welche zunächst N Zwischengrößen aus $N(N-1)$ Gleichungen ermittelt und aus diesen Zwischengrößen dann die Beobachterposition bestimmt. Die auftretenden Unsicherheiten werden allerdings nicht berücksichtigt.

In [2, 3] wird ein anderer Ansatz vorgeschlagen. Landmarken werden dort durch zwei Sensoren vermessen, wodurch eine Triangulation möglich wird. Die Lösung des Stereo–Korrespondenzproblem wird dabei durch die Verwendung einer verschiebbaren Kamera und Verfolgung der Merkmale umgangen. Diese Art der Korrespondenzfindung arbeitet nur im Stillstand zufriedenstellend, so daß bei Experimenten mit einem Fahrzeug bislang nur ein Stop–and–Go–Betrieb möglich war.

Hier wird nun ein Algorithmus zur Bestimmung der Beobachterlage auf der Basis von N Winkelmessungen vorgestellt, welcher aus $N-1$ linearen Gleichungen für die Beobachterposition und N linearen Gleichungen für die Orientierung besteht. Dieses Gleichungssystem wird durch eine Transformation der nichtlinearen Meßgleichungen hergeleitet, wobei keinerlei Approximation erforderlich ist. Bei der Lösung werden sowohl Unsicherheiten in den Winkelmessungen als auch in den Landmarkenpositionen berücksichtigt.

4.1.3 Ein lineares Gleichungssystem für die Beobachterposition

Die Meßgleichung für eine einzelne Winkelmessung α_i ist durch

$$\alpha_i = \operatorname{atan2}\left(x_i^{\mathrm{LM}} - x^S, y_i^{\mathrm{LM}} - y^S\right) - \psi^S \quad , \tag{4.3}$$

für $i = 1, \ldots, N$ gegeben. Es ergeben sich Differenzwinkel γ_i als die Differenz zweier aufeinanderfolgender absoluter Winkelmessungen α_i und α_{i+1} gemäß

$$\gamma_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i = \operatorname{atan2}\left(x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x^S, y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - y^S\right) - \operatorname{atan2}\left(x_i^{\mathrm{LM}} - x^S, y_i^{\mathrm{LM}} - y^S\right) \quad ,$$

für $i = 1, \ldots, N-1$. Mit Hilfe des Zusammenhangs [104]

$$\tan(\operatorname{atan}(\eta) - \operatorname{atan}(\theta)) = \frac{\eta - \theta}{1 + \eta\,\theta}$$

ergibt sich

$$\tan(\gamma_i) = \frac{\frac{y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - y^S}{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x^S} - \frac{y_i^{\mathrm{LM}} - y^S}{x_i^{\mathrm{LM}} - x^S}}{1 + \frac{y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - y^S}{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x^S} \cdot \frac{y_i^{\mathrm{LM}} - y^S}{x_i^{\mathrm{LM}} - x^S}} \ ,$$

und nach einigen Umstellungen mit $\underline{\bar{x}}^S = \left[x^S,\, y^S\right]^T$

$$\begin{aligned} & y_{i+1}^{\mathrm{LM}} y_i^{\mathrm{LM}} + x_{i+1}^{\mathrm{LM}} x_i^{\mathrm{LM}} + \cot(\gamma_i)\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}} x_i^{\mathrm{LM}}\} \\ & = \begin{bmatrix} \cot(\gamma_i)\{y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}}\} + x_{i+1}^{\mathrm{LM}} + x_i^{\mathrm{LM}} \\ \cot(\gamma_i)\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x_i^{\mathrm{LM}}\} + y_{i+1}^{\mathrm{LM}} + y_i^{\mathrm{LM}} \end{bmatrix}^T \underline{\bar{x}}^S - \left(\underline{\bar{x}}^S\right)^T \underline{\bar{x}}^S \end{aligned} \tag{4.4}$$

für $i = 1, \ldots, N-1$. Allerdings enthält (4.4) noch quadratische Terme. Zu deren Eliminierung wird ausgenutzt, daß die Summe der Differenzwinkel 2π ergeben muß. Diese Bedingung

$$\gamma_N = 2\pi - \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i = \alpha_1 - \alpha_N$$

wird als Gleichung N verwendet. Zieht man nun von jeder Gleichung ihre Folgegleichung ab, so ergibt sich ein System von $N-1$ Gleichungen, welche *linear* in x^S und y^S sind, d.h.

$$\underline{z} = \mathbf{H}\, \underline{\bar{x}}^S \tag{4.5}$$

mit $\underline{z} = [z_1, \ldots, z_{N-1}]^T$, $\mathbf{H} = [\underline{h}_1, \ldots, \underline{h}_{N-1}]^T$, $\underline{h}_i = [h_i^x, h_i^y]^T$. Die Elemente sind gegeben als

$$\begin{aligned} z_i &= \cos(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1})\left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}} x_i^{\mathrm{LM}}\right\} \\ &\quad + \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1})\left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} x_i^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}} x_{i+1}^{\mathrm{LM}} + y_{i+1}^{\mathrm{LM}} y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+2}^{\mathrm{LM}} y_{i+1}^{\mathrm{LM}}\right\} \\ &\quad + \sin(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1})\left\{y_{i+2}^{\mathrm{LM}} x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}} y_{i+1}^{\mathrm{LM}}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_i^x &= \cos(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1})\left\{y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}}\right\} \\ &\quad + \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1})\left\{x_i^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right\} \\ &\quad + \sin(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1})\left\{y_{i+2}^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}}\right\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h_i^y &= \cos(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1})\left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x_i^{\mathrm{LM}}\right\} \\ &\quad + \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1})\left\{y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right\} \\ &\quad + \sin(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1})\left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right\} \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, N-1$. Indexoperationen werden modulo N durchgeführt, d.h., $i+2 = 1$ für $i = N-1$.

4.1.4 Perturbationsanalyse

In diesem Abschnitt wird die Wirkung der *Unsicherheiten* sowohl in *Landmarkenposition* als auch in den *Winkelmessungen* auf die Positionsschätzung analysiert. Diese Analyse wird benötigt, um 1. die optimale Gewichtungsmatrix für die LS–Lösung des obigen linearen Gleichungssystems zu bestimmen, und um 2. die Menge aller Lösungen zu bestimmen, welche kompatibel mit den a priori angenommenen Amplitudengrenzen sind.

Das Gleichungsystem (4.5) wird zunächst auf die Standardform

$$\hat{\underline{z}} = \hat{\mathbf{H}}\,\bar{\underline{x}}^S + \underline{e}$$

gebracht, indem die Unsicherheiten in den Landmarkenpositionen und in den Winkelmessungen zu einem Gleichungsfehlervektor $\underline{e}$ zusammengefaßt werden. $\hat{\underline{z}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ ergeben sich aus (4.5) durch Einsetzen der Nominalwerte der Landmarkenpositionen und der gemessenen Winkel. Der Gleichungsfehlervektor $\underline{e}$ wird damit durch

$$\underline{e} = \underline{z} - \mathbf{H}\tilde{\underline{x}}^S = \Delta\underline{z} - \Delta\mathbf{H}\tilde{\underline{x}}^S$$

bestimmt und läßt sich durch

$$\underline{e} \approx \mathbf{J}_{\underline{e}}^{\underline{x}^{\mathrm{LM}}}\Big|_{\left[\hat{\underline{x}}_i^{\mathrm{LM}},\,\hat{\alpha}_i,\,i=1,\ldots,N\right]} \Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}} + \mathbf{J}_{\underline{e}}^{\underline{\alpha}}\Big|_{\left[\hat{\underline{x}}_i^{\mathrm{LM}},\,\hat{\alpha}_i,\,i=1,\ldots,N\right]} \Delta\underline{\alpha} \quad , \tag{4.6}$$

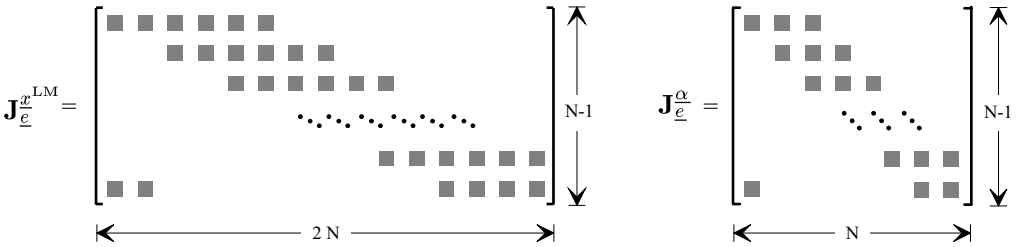
approximieren, wobei

$$\Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}} = \left[\left(\Delta\underline{x}_1^{\mathrm{LM}}\right)^T, \left(\Delta\underline{x}_2^{\mathrm{LM}}\right)^T, \ldots, \left(\Delta\underline{x}_N^{\mathrm{LM}}\right)^T\right]^T$$

die Fehler in den Landmarkenpositionen darstellt, und

$$\Delta\underline{\alpha} = \left[\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \ldots, \Delta\alpha_N\right]^T$$

die Fehler in den gemessenen Winkeln bezeichnet. Die Jacobi–Matrizen $\mathbf{J}_{\underline{e}}^{\underline{x}^{\mathrm{LM}}}$ und $\mathbf{J}_{\underline{e}}^{\underline{\alpha}}$ haben nahezu Bandstruktur



wobei ■ ein von Null verschiedenes Element bezeichnet. Diese Matrix–Elemente sind in Anhang A.2 gegeben.

Die Vektoren $\Delta\underline{x}^{\mathrm{LM}}$ und $\Delta\underline{\alpha}$ sind nun nicht durch Ellipsoide begrenzt, da lediglich (4.1) für die einzelnen Landmarken und (4.2) für die einzelnen gemessenen Winkel gelten. Mit den Verfahren aus Anhang B.6 läßt sich aber ein minimalvolumiges Hüllellipsoid für die Menge möglicher Gleichungsfehler finden, so daß gilt

$$\underline{e} \in \mathcal{E} \text{ mit } \mathcal{E} = \left\{\underline{e} : \underline{e}^T\,\mathbf{E}^{-1}\,\underline{e} \le 1\right\} \quad .$$

4.1.5 Bestimmung der Beobachterposition

Die Menge aller möglichen Beobachter*positionen*, welche kompatibel mit den a priori spezifizierten Amplitudengrenzen für die Unsicherheiten sind, ist nach Satz 2.5 gegeben durch

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{X}}^S &= \left\{\bar{\underline{x}}^S : \left(\bar{\underline{x}}^S - \hat{\bar{\underline{x}}}^S\right)^T \left(\bar{\mathbf{X}}^S\right)^{-1} \left(\bar{\underline{x}}^S - \hat{\bar{\underline{x}}}^S\right) \le 1\right\} \\
\hat{\bar{\underline{x}}}^S &= \left(\hat{\mathbf{H}}^T\mathbf{E}^{-1}\hat{\mathbf{H}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{H}}^T\mathbf{E}^{-1}\hat{\underline{z}} \\
\bar{\mathbf{X}}^S &= \bar{d}\left(\hat{\mathbf{H}}^T\mathbf{E}^{-1}\hat{\mathbf{H}}\right)^{-1} \\
\bar{d} &= 1 - \left(\hat{\underline{z}} - \hat{\mathbf{H}}\,\hat{\bar{\underline{x}}}^S\right)^T \mathbf{E}^{-1}\left(\hat{\underline{z}} - \hat{\mathbf{H}}\,\hat{\bar{\underline{x}}}^S\right) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei wieder gilt $\underline{\bar{x}}^S = \left[x^S, y^S\right]^T$.

Es wird hier gleichzeitig eine Entscheidung darüber getroffen, ob die verwendete Zuordnung von gemessenen Winkeln zu Landmarken plausibel ist, vgl. Kapitel 2.5, Abschnitt 2.5.3. Gilt $\bar{d} \leq 0$, so steht zunächst fest, daß die gefundene Beobachterposition nicht kompatibel mit den a priori gegebenen Amplitudengrenzen für die Unsicherheiten in den Landmarkenpositionen und den Winkelmessungen ist. Unter den oben gemachten Annahmen können diese Unsicherheiten aber nur innerhalb der Amplitudengrenzen variieren. Es kann also gefolgert werden, daß die verwendete Zuordnung nicht plausibel ist.

Bei Vorliegen einer Schätzung für die Beobachterposition kann die Orientierung aus dem Gleichungssystem (4.3) bestimmt werden, welches dann linear in der Orientierung ist.

4.2 Effiziente Lokalisierung von Umweltmerkmalen mit Distanzsensor–Arrays beliebiger Geometrie

Nach der Herleitung eines effizienten Verfahrens für die Lokalisierung auf der Grundlage von *reinen* Winkelmessungen im letzten Abschnitt wird im folgenden das Problem der Lokalisierung von Umweltmerkmalen basierend auf *reinen* Distanzmessungen behandelt.

4.2.1 Formulierung des Problems

Gegeben sei eine[5)] Signalquelle, welche pulsförmige Signale emittiert. Diese Signale werden von Landmarken reflektiert, welche sich im Einzugsbereich der Signalquelle befinden. N Empfänger an beliebigen, aber bekannten Positionen $\underline{C}_i = [C_i^x, C_i^y, C_i^z]^T$, $i = 1, \ldots, N$ analysieren die zurückkehrenden Echos. Die Meßgeometrie ist in der Abb. 4.2 dargestellt, wobei o.B.d.A. angenommen wird, daß die Signalquelle im Ursprung des Meßkoordinatensystems liegt. Für jede Landmarke können maximal N Distanzen R_i, $i = 1, \ldots, N$, gemessen werden, welche jeweils die Summe der Distanzen Signalquelle → Landmarke und Landmarke → Empfänger i repräsentieren und zu einem Vektor $\underline{R} = [R_1, \ldots, R_N]^T$ zusammengefaßt werden. Jede gemessene Distanz R_i definiert zusammen mit der Empfängerposition $\underline{C}_i$ ein Ellipsoid, auf dessen Oberfläche sich die gesuchte Landmarke befindet.

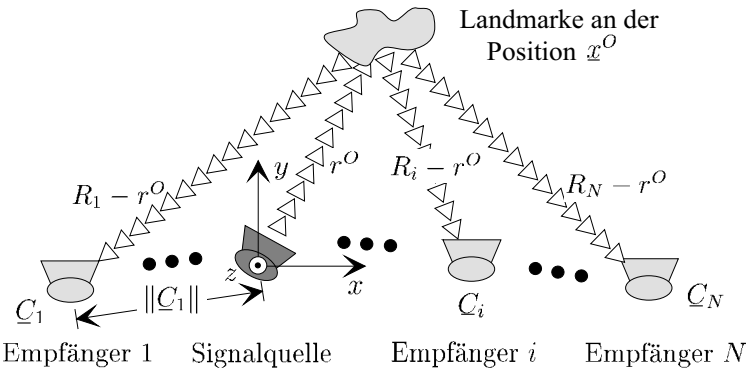


Abbildung 4.2: Meßanordnung mit allgemeiner Array–Geometrie.

Es wird zugelassen, daß die gemessenen Distanzen durch additive Fehler gestört sind. Diese Fehler werden durch Amplitudengrenzen der Form

$$\mathcal{R} = \left\{ \underline{R} : \left(\underline{R} - \hat{\underline{R}}\right)^T \mathbf{R}^{-1} \left(\underline{R} - \hat{\underline{R}}\right) \leq 1 \right\}$$

[5)] Die Darstellung ist auf eine Signalquelle pro Landmarke beschränkt, läßt sich aber leicht auf mehrere Signalquellen ausdehnen, welche eine Landmarke anstrahlen.

modelliert. Damit wird angenommen, daß der Vektor $\underline{\tilde{R}}$ der tatsächlichen, und damit unbekannten, Distanzen sich innerhalb der Menge $\mathcal{R}$ befindet. Diese Definition der Amplitudengrenzen durch ein (Hyper–)Ellipsoid hat gegenüber komponentenweisen Grenzen[6)] den Vorteil, daß auch Abhängigkeiten zwischen den Distanzen R_i modelliert werden können.

Das Problem der Zuordnung von gemessenen Distanzen zu den entsprechenden Landmarken wird hier als gelöst angenommen. Eine mögliche Lösung wurde in Abschnitt 3.6 vorgestellt.

Die Position einer Landmarke bezüglich des Meßkoordinatensystems kann damit als Schnittpunkt der N Ellipsoide bestimmt werden, welche durch die gemessenen Distanzen R_i und die Empfängerpositionen $\underline{C_i}$ definiert sind.

4.2.2 Bekannte Ansätze

Für den zweidimensionalen Fall, eine Signalquelle und ein Array von zwei oder drei Empfängern finden sich einfache geschlossene Lösungen in [33, 47, 53, 58, 59, 60, 62]. Der Fall von zwei Signalquellen und zwei Empfängern wird in [46, 48] betrachtet, die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall mit drei Signalquellen und drei Empfängern in [32, 54].

In [49] werden für den zweidimensionalen Fall Pulsholographie–Verfahren vorgeschlagen, wobei die Bestimmung der Schnittpunkte der Ellipsen, welche die Reflektororte definieren, numerisch auf einem Raster durchgeführt wird. Rasterbasierte Verfahren [41, 42, 69] sind nicht effizient, wenn nur einige Reflektoren vorliegen und vor allem wäre der Rechenaufwand für den dreidimensionalen Fall sehr hoch.

Die direkte, analytische Lösung der exakten, nichtlinearen Meßgleichungen für ein Array beliebiger Geometrie im Sinne der kleinsten Quadrate führt auf ein iteratives Optimierungsverfahren, was im Rahmen von Echtzeitanwendungen nicht wünschenswert ist. Analytische Lösungen verwenden deshalb häufig eine Fernfeldapproximation [57], was für viele Anwendungen gerade in engräumiger Umgebung zu ungenau ist. Außerdem werden die in realen Applikationen nicht zu vernachlässigenden Meßfehler, vgl. Abschnitt 5.1.3, in den meisten Ansätzen bei der Lageschätzung gar nicht oder nur in stark vereinfachter Form berücksichtigt.

Hier wird nun ein effizienter Algorithmus für die Lokalisierung reflektierender Landmarken mit einem aktiven Sensorarray mit beliebiger Sensoranzahl und Geometrie hergeleitet. Der Algorithmus verwendet die *exakten Meßgleichungen* und basiert auf Ideen aus dem Bereich der passiven Lokalisierung von Signalquellen, welche in [61, 65, 67] beschrieben werden. Meßfehler werden als integraler Bestandteil des Algorithmus berücksichtigt, um 1. die Lokalisierungsgenauigkeit zu erhöhen und um 2. eine Aussage über die Qualität der Lageschätzung machen zu können.

4.2.3 Landmarkenmodelle

Reale Landmarken im dreidimensionalen Raum seien entweder durch 1. punktförmige Reflektoren oder 2. ebene Flächen, an denen eine Spiegelreflexion stattfindet, modelliert [51, 52]. Die Meßgeometrien für diese einfachen Landmarkenprimitive sind in der Abb. 4.3 dargestellt. Die im folgenden beschriebenen Verfahren lassen sich auch für den zweidimensionalen Fall verwenden, wovon in Kapitel 3 Gebrauch gemacht wird.

[6)] Komponentenweise Grenzen entsprechen einem (Hyper–)Rechteck, das mit den Achsen des Koordinatensystems ausgerichtet ist.

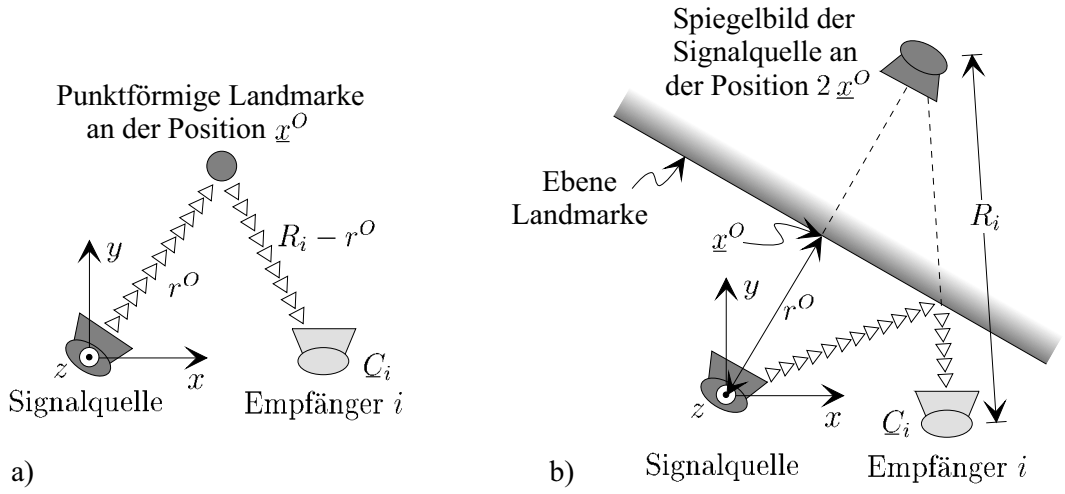


Abbildung 4.3: Bestimmung der Lage einer a) punktförmigen, b) ebenen Landmarke mit einem Distanzsensor–Array allgemeiner Geometrie.

4.2.4 Bestimmung der Position von punktförmigen Landmarken

Vorgelegt sei die Meßgeometrie für eine punktförmige Landmarke nach Abb. 4.3 a). $\underline{x}^O = [x^O, y^O, z^O]^T$ und $r^O = \|\underline{x}^O\|$ bezeichnen die Landmarkenposition bzw. den Abstand zum Ursprung. Es gilt offensichtlich

$$R_i - r^O = \left\| \underline{x}^O - \underline{C}_i \right\| \quad , \tag{4.7}$$

für $i = 1, \ldots, N$. Für $N > 3$ handelt es sich hier um ein überbestimmtes, nichtlineares Gleichungssystem. Da sich aus der Messung ein fehlerbehafteter Distanzvektor $\underline{\hat{R}}$ ergibt, wäre es sinnvoll, einen Fehlervektor $\underline{e}^*$ mit $e_i^* = \hat{R}_i - \left(\left\| \underline{x}^O - \underline{C}_i \right\| + r^O \right)$ zu definieren und die geschätzte Landmarkenposition $\underline{\hat{x}}^O$ derart zu wählen, daß eine Norm dieses Fehlervektors minimiert wird. Leider führt die Bestimmung eines Schätzwert $\underline{\hat{x}}^O$ selbst für eine L_2–Norm zu einem komplizierten nichtlinearen Optimierungsproblem. Hier wird deshalb ein Fehlervektor $\underline{e}$ definiert, dessen L_2–Norm sich in geschlossener Form minimieren läßt.

Durch Quadrieren von (4.7) ergibt sich ein Gleichungssystem

$$\underline{\delta} + 2r^O \underline{R} = \mathbf{H}\, \underline{x}^O \tag{4.8}$$

mit

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \|\underline{C}_1\|^2 - R_1^2 \\ \|\underline{C}_2\|^2 - R_2^2 \\ \vdots \\ \|\underline{C}_N\|^2 - R_N^2 \end{bmatrix} , \; \underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} , \; \mathbf{H} = 2 \begin{bmatrix} \underline{C}_1^T \\ \underline{C}_2^T \\ \vdots \\ \underline{C}_N^T \end{bmatrix} \quad , \tag{4.9}$$

welches für einen gegebenen Landmarkenabstand linear in der Landmarkenposition ist, und für eine gegebene Landmarkenposition linear im Landmarkenabstand ist. Dieses Gleichungssystem wird nun im folgenden Satz auf die Standardform gebracht.

SATZ 4.1 *Für einen gegebenen Landmarkenabstand r^O ergibt sich ein lineares Gleichungssystem*

$$\underline{\hat{\delta}} + 2r^O \underline{\hat{R}} = \mathbf{H}\, \underline{x}^O + \underline{e}^{(I)} \tag{4.10}$$

für die Position $\underline{x}^O$ einer punktförmigen Landmarke. Der Fehlervektor $\underline{e}^{(I)}$ ist damit durch ein Ellipsoid gemäß

$$\mathcal{E}^{(I)} = \left\{ \underline{e}^{(I)} : \left(\underline{e}^{(I)}\right)^T \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \underline{e}^{(I)} \leq 1 \right\}$$

in der Amplitude begrenzt, d.h. $\underline{e}^{(I)} \in \mathcal{E}^{(I)}$. $\mathbf{E}^{(I)}$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{E}^{(I)} = (\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\tilde{r}\mathbf{I})\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\tilde{r}\mathbf{I}) \;\; mit \;\; \mathbf{R}_D = -2\,\mathrm{diag}(\underline{R})}$$

Beweis. Bei Vernachlässigung von Produkten von Fehlertermen ergibt sich aus (4.8) für den Gleichungsfehlervektor $\underline{e}^{(I)}$ der Ausdruck

$$\underline{e}^{(I)} \approx \Delta\underline{\delta} + 2\,\tilde{r}^O\,\Delta\underline{R} \;\; ,$$

wobei angenommen wurde, daß der gegebene Landmarkenabstand nicht wesentlich von dem tatsächlichen Landmarkenabstand $\tilde{r}^O$ abweicht. Mit $\Delta\underline{\delta} \approx \mathbf{R}_D\,\Delta\underline{R}$ erhält man

$$\underline{e}^{(I)} \approx \left\{ \mathbf{R}_D + 2\,\tilde{r}^O\mathbf{I} \right\} \Delta\underline{R} \;\; ,$$

woraus der Satz folgt. □

Zur Gewinnung eines Schätzwertes für den Landmarkenabstand r^O wird zunächst die formale (gewichtete) Lösung im Sinne kleinster Quadrate für die Position $\underline{x}^O$ bei einem gegebenen Abstand r^O bestimmt, welche gegeben ist als

$$\underline{\hat{x}}^O = \underline{\hat{\alpha}}^{(I)} + 2r^O\underline{\hat{\beta}}^{(I)} \tag{4.11}$$

mit

$$\underline{\hat{\alpha}}^{(I)} = \mathbf{G}^{(I)}\underline{\hat{\delta}}, \;\; \underline{\hat{\beta}}^{(I)} = \mathbf{G}^{(I)}\underline{\hat{R}} \tag{4.12}$$

und

$$\mathbf{G}^{(I)} = \left(\mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} . \tag{4.13}$$

Aus (4.11) erhält man mit

$$\left(r^O\right)^2 = \left(\underline{\hat{x}}^O\right)^T \underline{\hat{x}}^O = \left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)} + 2r^O\underline{\hat{\beta}}^{(I)}\right)^T \left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)} + 2r^O\underline{\hat{\beta}}^{(I)}\right)$$

eine quadratische Gleichung für r^O

$$\left\{ 4\left(\underline{\hat{\beta}}^{(I)}\right)^T \underline{\hat{\beta}}^{(I)} - 1 \right\} \left(r^O\right)^2 + 4\left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)}\right)^T \underline{\hat{\beta}}^{(I)}\, r^O + \left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)}\right)^T \underline{\hat{\alpha}}^{(I)} = 0 \;\; . \tag{4.14}$$

Eine positive[7)] Wurzel von (4.14) ergibt einen nominalen Schätzwert $\hat{r}^O$ für den Landmarkenabstand und wird in (4.8) eingesetzt.

[7)] Siehe Anhang A für eine detaillierte Diskussion der Berechnung von $\hat{r}^O$.

Berechne die Gewichtungsmatrix $\left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1}$ gemäß Satz 4.1
Bestimme $\mathbf{G}^{(I)}$ aus (4.13)
Berechne $\underline{\hat{\alpha}}^{(I)}$, $\underline{\hat{\beta}}^{(I)}$ aus (4.12)
Bestimme $\hat{r}^O$ als positive Wurzel der quadratischen Gleichung (4.14)
Berechne die Gewichtungsmatrix $\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1}$ mit $\mathbf{E}^{(II)} = \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{D}^T$ und $\mathbf{D}$ gemäß Satz 4.2
Bestimme $\mathbf{G}^{(II)}$ aus (4.16)
Berechne $\underline{\hat{\alpha}}^{(II)}$, $\underline{\hat{\beta}}^{(II)}$ aus (4.15)
Berechne den Mittelpunkt $\underline{\hat{x}}^O$ des Ellipsoids $\mathcal{X}^O$ als $\underline{\hat{x}}^O = \underline{\hat{\alpha}}^{(II)} + 2\,\hat{r}^O\,\underline{\hat{\beta}}^{(II)}$
Bestimme d^{Punkt} gemäß (4.18)
Berechne die Definitionsmatrix $\mathbf{X}^O$ des Ellipsoids $\mathcal{X}^O$ nach (4.17)

Abbildung 4.4: Zusammenfassung des Verfahrens zur Bestimmung aller Positionen einer punktförmigen Landmarke, welche kompatibel mit der Messung und den a priori gegebenen Fehlergrenzen sind.

SATZ 4.2 *Nach Einsetzen des geschätzten Landmarkenabstands $\hat{r}^O$ ergibt sich aus Satz 4.1 ein lineares Gleichungssystem*

$$\underline{\hat{\delta}} + 2\hat{r}^O\underline{\hat{R}} = \mathbf{H}\,\underline{x}^O + \underline{e}^{(II)}$$

für die Landmarkenposition. Der Fehler $\underline{e}^{(II)}$ ist durch ein Ellipsoid gemäß

$$\mathcal{E}^{(II)} = \left\{\underline{e}^{(II)} : \left(\underline{e}^{(II)}\right)^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \underline{e}^{(II)} \leq 1\right\}$$

in der Amplitude begrenzt, d.h. $\underline{e}^{(II)} \in \mathcal{E}^{(II)}$. $\mathbf{E}^{(II)}$ ist gegeben durch $\mathbf{E}^{(II)} = \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{D}^T$ mit

$$\mathbf{D} = \left\{\mathbf{I} - \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\gamma}}^T\,\mathbf{G}^{(I)}\right\}\left(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\tilde{r}^O\mathbf{I}\right) \quad \textit{wobei} \quad \underline{\tilde{\gamma}} = 2\left(2\left(\underline{\tilde{x}}^O\right)^T\underline{\tilde{\beta}} - \tilde{r}^O\right)^{-1}\underline{\tilde{x}}^O$$

BEWEIS. Bei Vernachlässigung von Produkten von Fehlertermen erhält man für den Gleichungsfehler $\underline{e}^{(II)}$ mit $\hat{r}^O = \tilde{r}^O + \Delta r^O$

$$\underline{e}^{(II)} \approx \Delta\delta + 2\,\tilde{r}^O\,\Delta\underline{R} + 2\,\underline{\tilde{R}}\,\Delta r^O \quad .$$

Aus Gleichung (4.14) ergibt sich durch Einsetzen von $\hat{r}^O = \tilde{r}^O + \Delta r^O$, $\underline{\hat{\alpha}}^{(I)} = \underline{\tilde{\alpha}}^{(I)} + \Delta\underline{\alpha}^{(I)}$ und $\underline{\hat{\beta}}^{(I)} = \underline{\tilde{\beta}}^{(I)} + \Delta\underline{\beta}^{(I)}$ bei Vernachlässigung von Produkten von Fehlertermen

$$\Delta r^O \approx -\frac{\left(\underline{\tilde{x}}^O\right)^T}{2\left(\underline{\tilde{x}}^O\right)^T \underline{\tilde{\beta}} - \tilde{r}^O}\left\{\Delta\underline{\alpha}^{(I)} + 2\,\tilde{r}^O\,\Delta\underline{\beta}^{(I)}\right\} \quad .$$

Wegen $\Delta\underline{\delta} \approx \tilde{\mathbf{R}}_D\,\Delta\underline{R}$, $\Delta\underline{\alpha} \approx \mathbf{G}^{(I)}\,\tilde{\mathbf{R}}_D\,\Delta\underline{R}$, $\Delta\underline{\beta} \approx \mathbf{G}^{(I)}\,\Delta\underline{R}$ folgt $\underline{e}^{(II)} \approx \mathbf{D}\,\Delta\underline{R}$. □

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems führt nicht auf eine einzelne Landmarkenposition, sondern auf eine Menge von Positionen, welche kompatibel mit den Amplitudengrenzen für $\underline{e}^{(II)}$ sind.

SATZ 4.3 *Die Menge der möglichen Positionen einer punktförmigen Landmarke ist gegeben durch das Ellipsoid*

$$\mathcal{X}^O = \left\{\underline{x}^O : \left(\underline{x}^O - \underline{\hat{x}}^O\right)^T \left(\mathbf{X}^O\right)^{-1} \left(\underline{x}^O - \underline{\hat{x}}^O\right) \leq 1\right\} \quad .$$

Der Mittelpunkt des Ellipsoids ist

$$\underline{\hat{x}}^O = \underline{\hat{\alpha}}^{(II)} + 2\,\hat{r}^O\underline{\hat{\beta}}^{(II)}\,,\ \underline{\hat{\alpha}}^{(II)} = \mathbf{G}^{(II)}\underline{\hat{\delta}}\,,\ \underline{\hat{\beta}}^{(II)} = \mathbf{G}^{(II)}\underline{\hat{R}} \tag{4.15}$$

mit

$$\mathbf{G}^{(II)} = \left(\mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \quad . \tag{4.16}$$

Die Definitionsmatrix des Ellipsoids ergibt sich als

$$\mathbf{X}^O = d^{Punkt}\left(\mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \quad , \tag{4.17}$$

wobei d^{Punkt} durch den Ausdruck

$$d^{Punkt} = 1 - \left\{\underline{\hat{\delta}} + 2\,\hat{r}^O\,\underline{\hat{R}} - \mathbf{H}\,\underline{\hat{x}}^O\right\}^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \left\{\underline{\hat{\delta}} + 2\,\hat{r}^O\,\underline{\hat{R}} - \mathbf{H}\,\underline{\hat{x}}^O\right\} \tag{4.18}$$

gegeben ist.

BEWEIS. Kapitel 2, Abschnitt 2.5. □

Das Verfahren zur Bestimmung der Positionen einer punktförmigen Landmarke, welche kompatibel mit den a priori gegebenen Fehlergrenzen sind, ist in der Abb. 4.4 zusammengefaßt.

BEMERKUNG 4.1 Die zur Gewichtung verwendeten Matrizen $\left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1}$, $\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1}$ und $\mathbf{D}$ enthalten die tatsächlichen Werte, die selbstverständlich zunächst unbekannt sind. Um zu einer Lösung zu gelangen, sind also einige Approximationen notwendig. Es ist zu betonen, daß diese Approximationen nur die Gewichtungsmatrizen betreffen, nicht die Bestimmung der Schätzwerte.

Zunächst einmal werden die gemessenen Distanzen zur Approximation der wahren Distanzwerte $\tilde{R}_i$ verwendet. Ist kein Vorwissen über die Landmarkenposition vorhanden, bietet sich folgendes Vorgehen an: Im ersten Schritt wird $\{\mathbf{R}_D\mathbf{R}\mathbf{R}_D\}^{-1}$ an Stelle von $\left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1}$ verwendet, um eine Lösung für $\underline{\alpha}^{(I)}$, $\underline{\beta}^{(I)}$ zu bestimmen. Der resultierende Schätzwert für r^O wird dann zur

Approximation von $\tilde{r}^O$ verwendet. Bei der Bestimmung der Lösung für die Landmarkenposition im Sinne kleinster Quadrate wird nun $\left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1}$ in einem ersten Schritt zur Approximation von $\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1}$ benutzt. Die erhaltene Schätzung für die Landmarkenposition wird dann für die genauere Bestimmung der Gewichtungsmatrix $\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1}$ verwendet.

In der Regel aller Fälle ist aber ein gewisses Vorwissen über die Landmarkenposition vorhanden, welches zur Bestimmung der Gewichtungsmatrizen genau genug ist.

4.2.5 Bestimmung der Lage von ebenen Landmarken

Die Lage einer ebenen Landmarke sei durch die kartesische Position $\underline{x}^O$ gegeben, an welcher der vom Ursprung des Meßkoordinatensystems ausgehende Normalenvektor die Ebene durchstößt. Nimmt man eine Spiegelreflexion an, so kann die Signalquelle durch ihr Spiegelbild ersetzt werden. Die Meßgleichung für eine ebene Landmarke entnimmt man damit der Abb. 4.3 b) als

$$R_i = \|2\,\underline{x}^O - \underline{C}_i\| \tag{4.19}$$

für $i = 1, \ldots, N$. Durch Quadrieren ergibt sich wieder ein Gleichungssystem

$$\underline{\delta} + 4\left(r^O\right)^2 \underline{1} = \mathbf{H}\,\underline{x}^O \tag{4.20}$$

mit $\underline{\delta}$ aus (4.9) und

$$\mathbf{H} = 4\begin{bmatrix} \underline{C}_1^T \\ \underline{C}_2^T \\ \vdots \\ \underline{C}_N^T \end{bmatrix}, \; \underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.21}$$

welches linear in der Landmarkenposition $\underline{x}^O$ für einen gegebenen Landmarkenabstand r^O, und linear im Landmarkenabstand r^O bei gegebener Landmarkenposition $\underline{x}^O$ ist. Analog zur Behandlung des Punktreflektors wird dieses Gleichungssystem zunächst einmal in die Standardform gebracht, indem die Meßunsicherheiten, welche über $\underline{\delta}$ und $\underline{R}$ in die Gleichung eingehen, durch Einführung eines Gleichungsfehlers $\underline{e}$ subsumiert werden.

SATZ 4.4 *Für einen gegebenen Landmarkenabstand r^O ergibt sich ein lineares Gleichungssystem*

$$\hat{\underline{\delta}} + 4\left(r^O\right)^2 \underline{1} = \mathbf{H}\,\underline{x}^O + \underline{e}^{(I)} \tag{4.22}$$

für die Position $\underline{x}^O$ einer ebenen Landmarke. Der Fehler $\underline{e}^{(I)}$ ist durch ein Ellipsoid gemäß

$$\mathcal{E}^{(I)} = \left\{\underline{e}^{(I)} : \left(\underline{e}^{(I)}\right)^T \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \underline{e}^{(I)} \leq 1\right\}$$

in der Amplitude begrenzt, d.h. $\underline{e}^{(I)} \in \mathcal{E}^{(I)}$. $\mathbf{E}^{(I)}$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{E}^{(I)} = \tilde{\mathbf{R}}_D\,\mathbf{R}\,\tilde{\mathbf{R}}_D}$$

BEWEIS. Analog zum Beweis von Satz 4.1. □

Es wird nun zunächst wieder die formale (gewichtete) Kleinste–Quadrate–Lösung für die Position $\underline{x}^O$ der ebenen Landmarke bei gegebenem Abstand r^O bestimmt, welche gegeben ist als

$$\underline{\hat{x}}^O = \underline{\hat{\alpha}}^{(I)} + 4\left(r^O\right)^2 \underline{\hat{\beta}}^{(I)} \tag{4.23}$$

mit

$$\underline{\hat{\alpha}}^{(I)} = \mathbf{G}^{(I)}\underline{\hat{\delta}}\,,\ \underline{\hat{\beta}}^{(I)} = \mathbf{G}^{(I)}\underline{1}$$

und

$$\mathbf{G}^{(I)} = \left(\mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \quad .$$

In diesem Fall erhält man mit (4.11) eine quadratische Gleichung für $\left(r^O\right)^2$

$$16\left(\underline{\hat{\beta}}^{(I)}\right)^T \underline{\hat{\beta}}^{(I)} \left(r^O\right)^4 + \left(8\left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)}\right)^T \underline{\hat{\beta}}^{(I)} - 1\right)\left(r^O\right)^2 + \left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)}\right)^T \underline{\hat{\alpha}}^{(I)} = 0 \tag{4.24}$$

Eine positive Wurzel $\left(\hat{r}^O\right)^2$ für das Quadrat des Landmarkenabstands wird in (4.22) eingesetzt.

SATZ 4.5 *Nach Einsetzen des geschätzten Landmarkenabstands $\hat{r}^O$ ergibt sich aus Satz 4.4 ein lineares Gleichungssystem*

$$\underline{\hat{\delta}} + 4\left(\hat{r}^O\right)^2 \underline{1} = \mathbf{H}\,\underline{x}^O + \underline{e}^{(II)}$$

für die Position $\underline{x}^O$ einer ebenen Landmarke. Der Fehler $\underline{e}^{(II)}$ ist durch ein Ellipsoid gemäß

$$\mathcal{E}^{(II)} = \left\{\underline{e}^{(II)} : \left(\underline{e}^{(II)}\right)^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \underline{e}^{(II)} \le 1\right\}$$

in der Amplitude begrenzt, d.h. $\underline{e}^{(II)} \in \mathcal{E}^{(II)}$. $\mathbf{E}^{(II)}$ ist gegeben durch $\mathbf{E}^{(II)} = \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{D}^T$ mit

$$\boxed{\mathbf{D} = \left\{\mathbf{I} - \underline{1}\,\underline{\tilde{\gamma}}^T \mathbf{G}^{(I)}\right\}\tilde{\mathbf{R}}_D \quad \textit{wobei} \quad \underline{\tilde{\gamma}} = 8\left(8\left(\underline{\tilde{x}}^O\right)^T \underline{\tilde{\beta}} - 1\right)^{-1} \underline{\tilde{x}}^O}$$

BEWEIS. Analog zum Beweis von Satz 4.2. □

SATZ 4.6 *Die Menge der möglichen Positionen einer ebenen Landmarke ist gegeben durch das Ellipsoid*

$$\mathcal{X}^O = \left\{\underline{x}^O : \left(\underline{x}^O - \underline{\hat{x}}^O\right)^T \left(\mathbf{X}^O\right)^{-1} \left(\underline{x}^O - \underline{\hat{x}}^O\right) \le 1\right\} \quad .$$

Der Mittelpunkt des Ellipsoids ist

$$\underline{\hat{x}}^O = \underline{\hat{\alpha}}^{(II)} + 4\left(\hat{r}^O\right)^2 \underline{\hat{\beta}}^{(II)}\,,\ \underline{\hat{\alpha}}^{(II)} = \mathbf{G}^{(II)}\underline{\hat{\delta}}\,,\ \underline{\hat{\beta}}^{(II)} = \mathbf{G}^{(II)}\underline{1}$$

mit

$$\mathbf{G}^{(II)} = \left(\mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \quad .$$

Die Definitionsmatrix des Ellipsoids ergibt sich als

$$\mathbf{X}^O = d^{Ebene} \left(\mathbf{H}^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \quad ,$$

wobei d^{Ebene} *durch*

$$d^{Ebene} = 1 - \left\{\underline{\hat{\delta}} + 4 \left(\hat{r}^O\right)^2 \underline{1} - \mathbf{H}\, \underline{\hat{x}}^O\right\}^T \left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} \left\{\underline{\hat{\delta}} + 4 \left(\hat{r}^O\right)^2 \underline{1} - \mathbf{H}\, \underline{\hat{x}}^O\right\}$$

gegeben ist.

Beweis. Kapitel 2, Abschnitt 2.5. □

4.2.6 Unterscheidung von Landmarkentypen

Die mengentheoretische Formulierung des Problems führt auf natürliche Weise zu einem Hypothesentest zur Unterscheidung der beiden Reflektortypen und zum Verwerfen von Fehlmessungen, vgl. Abschnitt 2.5.3. d^{Punkt} und d^{Ebene} stellen dabei ein Maß für den Abstand des tatsächlichen Gleichungsfehlers von der Oberfläche des Fehlerellipsoids dar.

Die Hypothese „Punktreflektor“ wird akzeptiert, falls gilt $0 < d^{\text{Punkt}} \leq 1$, $d^{\text{Ebene}} \leq 0$. Analog wird die Hypothese „ebener Reflektor“ akzeptiert, falls gilt $0 < d^{\text{Ebene}} \leq 1$, $d^{\text{Punkt}} \leq 0$. Gilt $d^{Ebene} \leq 0$, $d^{\text{Punkt}} \leq 0$, so wird angenommen, daß es sich bei dem gemessenen Distanzvektor $\underline{R}$ um eine Fehlmessung handelt. Ist sowohl d^{Ebene} größer Null als auch d^{Punkt} größer Null, so ist streng genommen keine Entscheidung möglich. In der Praxis wird aber diejenige Reflektorhypothese mit dem größeren d gewählt.

Die Zuverlässigkeit dieses Hypothesentests kann natürlich durch weitere Informationen über den spezifischen Meßprozeß erhöht werden. Eine Möglichkeit ist die Verwendung der Signalamplitude an den Empfängern, falls diese vom Meßaufbau geliefert wird.

4.2.7 Spezialfall: Lineare Arrays

Punktförmiger Reflektor

Wenn die Empfänger *und* die Signalquelle auf einer Geraden liegen, wird $\text{rang}(\mathbf{H}) = 1$ in (4.9). Dieser Fall wird deshalb gesondert betrachtet und führt zu einer stark vereinfachten Lösung. Es wird im folgenden o.B.d.A. angenommen, daß Empfänger und Signalquelle entlang der x–Achse angeordnet sind und daß sich die Landmarke in der x/y–Ebene befindet. Man erhält dann ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\underline{\hat{\delta}} = \hat{\mathbf{H}} \left[x^O, r^O\right]^T + \underline{e}\,, \; \hat{\mathbf{H}} = 2 \begin{bmatrix} C_1^x & , & -\hat{R}_1 \\ C_2^x & , & -\hat{R}_2 \\ \vdots & & \vdots \\ C_N^x & , & -\hat{R}_N \end{bmatrix} \quad ,$$

für x^O und r^O, woraus sich Schätzwerte $\hat{x}^O$, $\hat{r}^O$ ergeben. Hierbei ist zu beachten, daß die Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ von den gemessenen Distanzen abhängt. Der Fehler $\underline{e}$ ist durch ein Ellipsoid

$$\mathcal{E} = \{\underline{e} : \underline{e}^T \mathbf{E}^{-1} \underline{e} \leq 1\}$$

in der Amplitude begrenzt, wobei $\mathbf{E}$ für „kleine“ Fehler durch

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}\,\mathbf{R}\,\mathbf{D}^T$$

mit

$$\mathbf{D} = 2\,\mathrm{diag}\left(\tilde{r}^O - \tilde{R}_1,\, \tilde{r}^O - \tilde{R}_2,\, \ldots,\, \tilde{r}^O - \tilde{R}_N\right)$$

approximiert werden kann. Eine Lösung für die y–Position $\hat{y}^O$ der Landmarke ergibt sich aus

$$\left(\hat{y}^O\right)^2 = \left(\hat{r}^O\right)^2 - \left(\hat{x}^O\right)^2 \quad ,$$

wobei das Vorzeichen von $\hat{y}^O$ nach physikalischen Gesichtspunkten gewählt werden muß.

Satz 4.7 *Für eine lineare Anordnung von Empfängern und Signalquelle ergibt sich die Menge aller möglichen Positionen für einen punktförmigen Reflektor als*

$$\mathcal{X}^O = \left\{\underline{x}^O : (\underline{x}^O - \underline{\hat{x}}^O)^T \left(\mathbf{X}^O\right)^{-1} (\underline{x}^O - \underline{\hat{x}}^O) \leq 1\right\}$$

mit

$$\mathbf{X}^O = d^{Punkt}\,\mathbf{F}\left(\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{E}^{-1} \tilde{\mathbf{H}}\right)^{-1} \mathbf{F}^T$$

wobei

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tilde{x}^O}{\tilde{y}^O} & \frac{\tilde{r}^O}{\tilde{y}^O} \end{bmatrix}$$

und

$$d^{Punkt} = 1 - \left\{\underline{\hat{\delta}} - \hat{\mathbf{H}}\left[\hat{x}^O, \hat{r}^O\right]^T\right\}^T \mathbf{E}^{-1} \left\{\underline{\hat{\delta}} - \hat{\mathbf{H}}\left[\hat{x}^O, \hat{r}^O\right]^T\right\}$$

gilt.

Beweis. Aus einer Fehlerfortpflanzungsanalyse erster Ordnung entnimmt man, daß x^O, r^O durch ein Ellipsoid begrenzt sind, dessen Definitionsmatrix durch

$$d^{\mathrm{Punkt}} \cdot \left(\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{E}^{-1} \tilde{\mathbf{H}}\right)^{-1}$$

gegeben ist. Fehler in der Positionsschätzung x^O, y^O sind mit Fehlern in x^O, r^O durch

$$\begin{bmatrix} \Delta x^O \\ \Delta y^O \end{bmatrix} \approx \mathbf{F} \begin{bmatrix} \Delta x^O \\ \Delta r^O \end{bmatrix}$$

verknüpft, woraus der Satz folgt. □

Ebener Reflektor

Auch im Fall eines ebenen Reflektors ergibt sich eine stark vereinfachte Lösung, wenn die Empfänger auf einer Geraden liegen. Im Gegensatz zu einem punktförmigen Reflektor ist diese Lösung alternativ zur allgemeinen Lösung zu verwenden, wenn die Signalquelle nicht mit den Empfängern aufgereiht ist. Die Speziallösung *muß* allerdings verwendet werden, wenn die Signalquelle mit den Empfängern aufgereiht ist, da sonst rang($\mathbf{H}$) = 1 in (4.21) gilt. Es wird o.B.d.A. angenommen, daß die Empfänger parallel zur x–Achse im Abstand C^y angeordnet sind und die Landmarke mit der x/y–Ebene einen rechten Winkel einschließt, sodaß sich (4.20) zu

$$\delta_i = 4\,C_i^x\,x^O + 4\,w\,;\; i = 1,\,\ldots\,,\,N\,;\; w = C^y\,y^O - \left(r^O\right)^2$$

vereinfacht. Ein lineares Gleichungssystem für x^O und w ergibt sich damit zu

$$\underline{\hat{\delta}} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} x^O \\ w \end{bmatrix} + \underline{e}\,,\; \mathbf{H} = 4\begin{bmatrix} C_1^x & 1 \\ C_2^x & 1 \\ \vdots & \vdots \\ C_N^x & 1 \end{bmatrix}\quad .$$

Der Fehler $\underline{e}$ ist durch ein Ellipsoid

$$\mathcal{E} = \left\{\underline{e} : \underline{e}^T\mathbf{E}^{-1}\underline{e} \le 1\right\}$$

in der Amplitude begrenzt, wobei $\mathbf{E}$ durch

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}_D\,\mathbf{R}\,\mathbf{R}_D^T$$

gegeben ist. Mit $\left(r^O\right)^2 = \left(\underline{x}^O\right)^T\,\underline{x}^O$ kann bei vorliegenden Schätzwerten $\hat{x}^O$, w ein Schätzwert $\hat{y}^O$ aus

$$\left(\hat{y}^O\right)^2 - C^y\hat{y}^O + \hat{w} + \left(\hat{x}^O\right)^2 = 0$$

gewonnen werden.

Satz 4.8 *Für eine lineare Anordnung von Empfängern ergibt sich die Menge aller möglichen Positionen für einen ebenen Reflektor als*

$$\mathcal{X}^O = \left\{\underline{x}^O : \left(\underline{x}^O - \underline{\hat{x}}^O\right)^T\left(\mathbf{X}^O\right)^{-1}\left(\underline{x}^O - \underline{\hat{x}}^O\right)\right\}$$

mit

$$\mathbf{X}^O = d^{Ebene}\,\mathbf{F}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{F}^T$$

wobei

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2\tilde{x}^O}{C^y - 2\tilde{y}^O} & \frac{1}{C^y - 2\tilde{y}^O} \end{bmatrix}$$

und

$$d^{Ebene} = 1 - \left\{\underline{\hat{\delta}} - \mathbf{H}\left[\hat{x}^O\,,\;\hat{w}\right]^T\right\}^T\mathbf{E}^{-1}\left\{\underline{\hat{\delta}} - \mathbf{H}\left[\hat{x}^O\,,\;\hat{w}\right]^T\right\}$$

gilt.

Beweis. Analog zu Satz 4.7. □

4.2.8 Spezialfall: Planare Arrays

Punktförmiger Reflektor

Auch wenn die Empfänger *und* die Signalquelle planar liegen, kommt es bei $\mathbf{H}$ in (4.9) zu einem Rangabfall. Es wird o.B.d.A. angenommen, daß Empfänger und Signalquelle auf der x/y–Ebene angeordnet sind. Man erhält ein lineares Gleichungssystem für x^O, y^O und r^O gemäß

$$\hat{\underline{\delta}} = \hat{\mathbf{H}} \left[x^O, y^O, r^O\right]^T + \underline{e}\,,\ \hat{\mathbf{H}} = 2 \begin{bmatrix} C_1^x & , & C_1^y & , & -\hat{R}_1 \\ C_2^x & , & C_2^y & , & -\hat{R}_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_N^x & , & C_N^y & , & -\hat{R}_N \end{bmatrix} \quad .$$

Eine Schätzung $\hat{z}^O$ für die z–Position der Landmarke ergibt sich aus

$$\left(\hat{z}^O\right)^2 = \left(\hat{r}^O\right)^2 - \left(\hat{x}^O\right)^2 - \left(\hat{y}^O\right)^2 \quad .$$

Die restlichen Berechnungen verlaufen analog zur Behandlung des Spezialfalls eines linearen Arrays.

Ebener Reflektor

Nimmt man o.B.d.A. an, daß die Empfänger im Abstand C^z parallel zur x/y–Ebene angeordnet sind, so vereinfacht sich (4.22) zu

$$\delta_i = 4\, C_i^x\, x^O + 4\, C_i^y\, y^O + 4\, w\,;\ i = 1, \ldots, N\,;\ w = C^z\, z^O - \left(r^O\right)^2 \quad .$$

Ein lineares Gleichungssystem für x^O, y^O und w ergibt sich damit zu

$$\hat{\underline{\delta}} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x^O \\ y^O \\ w \end{bmatrix} + \underline{e}\,,\ \mathbf{H} = 4 \begin{bmatrix} C_1^x & , & C_1^y & , & 1 \\ C_2^x & , & C_2^y & , & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \\ C_N^x & , & C_N^y & , & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Mit $\left(r^O\right)^2 = \left(\underline{x}^O\right)^T \underline{x}^O$ gewinnt man einen Schätzwert $\hat{z}^O$ aus

$$\left(\hat{z}^O\right)^2 - C^z \hat{z}^O + \hat{w} + \left(\hat{x}^O\right)^2 + \left(\hat{y}^O\right)^2 = 0 \quad .$$

Die anschließenden Berechnungen verlaufen wieder analog zur Behandlung eines linearen Arrays.

4.2.9 Rekursive Formulierung

In vielen Anwendungen ist es vorteilhaft, die Schätzung der Landmarkenposition durch die sequentielle Einbeziehung weiterer Messungen zu verbessern. Es wird darum im folgenden eine rekursive Formulierung der effizienten Positionsschätzer angegeben. Aus Platzgründen werden die Rekursionsgleichungen beispielhaft für eine punktförmige Landmarke hergeleitet.

Die Herleitung wird durch den Umstand erschwert, daß die Gewichtungsmatrix $\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1}$ keine Diagonalmatrix ist, selbst wenn $\mathbf{R}$ diagonal besetzt ist. Der nächste Satz erlaubt es, die Bestimmung von $\hat{\underline{\alpha}}^{(II)}$, $\hat{\underline{\beta}}^{(II)}$ trotzdem auf ein Standardverfahren zur rekursiven Lösung überbestimmter Gleichungssysteme zurückzuführen.

SATZ 4.9 *Die Inverse* $\mathbf{D}^{-1}$ *der Matrix* $\mathbf{D}$ *aus Satz 4.2 ist gegeben durch*

$$\mathbf{D}^{-1} = \left(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\,\tilde{r}\,\mathbf{I}\right)^{-1} \left\{\mathbf{I} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\,\mathbf{G}^{(I)}\right\} \tag{4.25}$$

mit

$$\underline{\tilde{\eta}} = \left[1 - \underline{\tilde{\gamma}}^T\,\underline{\tilde{\beta}}\right]^{-1} \underline{\tilde{\gamma}}\ .$$

BEWEIS. Zweifache Anwendung des SHERMAN–MORRISON–Lemmas [107]. □

SATZ 4.10 *Die Bestimmung von* $\underline{\hat{\alpha}}^{(II)}$, $\underline{\hat{\beta}}^{(II)}$ *in (4.15) wird durch die Transformationen*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{H}^* &= \mathbf{H} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\\ \underline{\hat{\delta}}^* &= \underline{\hat{\delta}} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\,\underline{\tilde{\alpha}}\\ \underline{\hat{R}}^* &= \underline{\hat{R}} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\,\underline{\tilde{\beta}}\end{aligned}}$$

auf ein diagonal gewichtetes Kleinste–Quadrate–Problem zurückgeführt. Als Gewichtungsmatrix wird nun $\left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1}$ *verwendet.*

BEWEIS. Mit $\mathbf{D}^{-1}$ aus Satz 4.9, der Beziehung $\mathbf{G}^{(I)}\mathbf{H} = \mathbf{I}$ und

$$\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1} = \left(\mathbf{D}^{-1}\right)^T \mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{-1}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^T\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1}\mathbf{H} &= \left(\mathbf{H} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\right)^T \left\{\left(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\,\tilde{r}\,\mathbf{I}\right)\,\mathbf{R}\,\left(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\,\tilde{r}\,\mathbf{I}\right)\right\}^{-1}\left(\mathbf{H} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\right)\ ,\\
\mathbf{H}^T\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1}\underline{\hat{\delta}} &= \left(\mathbf{H} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\right)^T \left\{\left(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\,\tilde{r}\,\mathbf{I}\right)\,\mathbf{R}\,\left(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\,\tilde{r}\,\mathbf{I}\right)\right\}^{-1}\left\{\underline{\hat{\delta}} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\,\underline{\tilde{\alpha}}\right\}\ ,\\
\mathbf{H}^T\left(\mathbf{E}^{(II)}\right)^{-1}\underline{\hat{R}} &= \left(\mathbf{H} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\right)^T \left\{\left(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\,\tilde{r}\,\mathbf{I}\right)\,\mathbf{R}\,\left(\tilde{\mathbf{R}}_D + 2\,\tilde{r}\,\mathbf{I}\right)\right\}^{-1}\left\{\underline{\hat{R}} + \underline{\tilde{R}}\,\underline{\tilde{\eta}}^T\,\underline{\tilde{\beta}}\right\}\ ,
\end{aligned}$$

also ein äquivalentes, diagonal gewichtetes Kleinste–Quadrate–Problem. □

Damit ergeben sich für $\mathbf{R} = \mathrm{diag}\,(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_N^2)$ Standard–Rekursionsgleichungen [107] zur Berechnung von $\underline{\hat{\alpha}}^{(II)}$, $\underline{\hat{\beta}}^{(II)}$ aus (4.15) als

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k^{(II)} &= \mathbf{P}_{k-1}^{(II)} - \frac{\mathbf{P}_{k-1}^{(II)}\underline{h}_k^*\underline{h}_k^{*T}\mathbf{P}_{k-1}^{(II)}}{w_k + \underline{h}_k^{*T}\mathbf{P}_{k-1}^{(II)}\underline{h}_k^*}\,,\\
\underline{\hat{\alpha}}_k^{(II)} &= \underline{\hat{\alpha}}_{k-1}^{(II)} + w_k\mathbf{P}_k^{(II)}\underline{h}_k^*\left\{\hat{\delta}_k^* - \underline{h}_k^{*T}\,\underline{\hat{\alpha}}_{k-1}^{(II)}\right\}\ ,\\
\underline{\hat{\beta}}_k^{(II)} &= \underline{\hat{\beta}}_{k-1}^{(II)} + w_k\mathbf{P}_k^{(II)}\underline{h}_k^*\left\{\hat{R}_k^* - \underline{h}_k^{*T}\,\underline{\hat{\beta}}_{k-1}^{(II)}\right\}
\end{aligned}$$

für $k = 1, \ldots, N$, $w_k = \left\{4\,(\tilde{r}^O - \tilde{R}_k)^2\sigma_k^2\right\}$, $\underline{\hat{\alpha}}_0^{(II)} = [0,0,0]^T$, $\underline{\hat{\beta}}_0^{(II)} = [0,0,0]^T$, $\mathbf{P}_0^{(II)} = c\,\mathbf{I}$, c groß, und den Transformationen

$$\begin{aligned}
\underline{h}_k^* &= 2\,\underline{C}_k + \tilde{R}_k\underline{\tilde{\eta}}\,,\\
\hat{\delta}_k^* &= \hat{\delta}_k + \tilde{R}_k\,\underline{\tilde{\eta}}^T\underline{\tilde{\alpha}}\,,\\
\hat{R}_k^* &= \hat{R}_k + \tilde{R}_k\,\underline{\tilde{\eta}}^T\,\underline{\tilde{\beta}}\ .
\end{aligned}$$

$\mathbf{P}_0^{(I)} = c\,\mathbf{I}\,,\ \underline{\hat{\alpha}}_0^{(I)} = [0,0,0]^T\,,\ \underline{\hat{\beta}}_0^{(I)} = [0,0,0]^T\,,\ \mathbf{P}_0^{(II)} = c\,\mathbf{I}\,,\ \underline{\hat{\alpha}}_0^{(II)} = [0,0,0]^T\,,\ \underline{\hat{\beta}}_0^{(II)} = [0,0,0]^T$
$\mathsf{A}_0 = 1\,,\ \mathsf{B}_0 = 0\,,\ \mathsf{C}_0 = 0\,,\ \mathsf{D}_0 = 0\,,\ \mathsf{E}_0 = 0\,,\ \mathsf{F}_0 = 0\,,\ c \ldots \text{groß}$

Für $k = 1, \ldots, N$

Berechne den Gewichtungsfaktor

$$w_k = \left\{ 4\,(\tilde{r}^O - \tilde{R}_k)^2 \sigma_k^2 \right\}$$

Bestimme die transformierten Größen

$$\underline{h}_k^* = 2\,\underline{C}_k + \tilde{R}_k \underline{\tilde{\eta}}\,,\ \hat{\delta}_k^* = \hat{\delta}_k + \tilde{R}_k\,\underline{\tilde{\eta}}^T \underline{\tilde{\alpha}}\,,\ \hat{R}_k^* = \hat{R}_k + \tilde{R}_k \underline{\tilde{\eta}}^T \underline{\tilde{\beta}}$$

$$\mathbf{P}_k^{(I)} = \mathbf{P}_{k-1}^{(I)} - \frac{\mathbf{P}_{k-1}^{(I)} \underline{h}_k \underline{h}_k^T \mathbf{P}_{k-1}^{(I)}}{w_k + \underline{h}_k^T \mathbf{P}_{k-1}^{(I)} \underline{h}_k} \qquad \mathbf{P}_k^{(II)} = \mathbf{P}_{k-1}^{(II)} - \frac{\mathbf{P}_{k-1}^{(II)} \underline{h}_k^* \underline{h}_k^{*T} \mathbf{P}_{k-1}^{(II)}}{w_k + \underline{h}_k^{*T} \mathbf{P}_{k-1}^{(II)} \underline{h}_k^*}$$

$$\underline{\hat{\alpha}}_k^{(I)} = \underline{\hat{\alpha}}_{k-1}^{(I)} + w_k \mathbf{P}_k^{(I)} \underline{h}_k \left\{ \hat{\delta}_k - \underline{h}_k^T \underline{\hat{\alpha}}_{k-1}^{(I)} \right\} \qquad \underline{\hat{\alpha}}_k^{(II)} = \underline{\hat{\alpha}}_{k-1}^{(II)} + w_k \mathbf{P}_k^{(II)} \underline{h}_k^* \left\{ \hat{\delta}_k^* - \underline{h}_k^{*T} \underline{\hat{\alpha}}_{k-1}^{(II)} \right\}$$

$$\underline{\hat{\beta}}_k^{(I)} = \underline{\hat{\beta}}_{k-1}^{(I)} + w_k \mathbf{P}_k^{(I)} \underline{h}_k \left\{ \hat{R}_k - \underline{h}_k^T \underline{\hat{\beta}}_{k-1}^{(I)} \right\} \qquad \underline{\hat{\beta}}_k^{(II)} = \underline{\hat{\beta}}_{k-1}^{(II)} + w_k \mathbf{P}_k^{(II)} \underline{h}_k^* \left\{ \hat{R}_k^* - \underline{h}_k^{*T} \underline{\hat{\beta}}_{k-1}^{(II)} \right\}$$

$$\mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k-1} - w_k \left(\hat{\delta}_k^* \right)^2 \qquad \mathsf{C}_k = \mathsf{C}_{k-1} + 2\,w_k\,\hat{\delta}_k^*\,\underline{h}_k^{*T} \qquad \mathsf{E}_k = \mathsf{E}_{k-1} - 4\,w_k \left(\hat{R}_k^* \right)^2$$
$$\mathsf{B}_k = \mathsf{B}_{k-1} - 4\,w_k\,\hat{R}_k^*\,\hat{\delta}_k^* \qquad \mathsf{D}_k = \mathsf{D}_{k-1} + 4\,w_k\,\hat{R}_k^*\,\underline{h}_k^{*T} \qquad \mathsf{F}_k = \mathsf{F}_{k-1} - w_k\,\underline{h}_k^*\,\underline{h}_k^{*T}$$

$k > 2$? J / N

Bestimme $\hat{r}^O$ als positive Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\left\{ 4 \left(\underline{\hat{\beta}}_k^{(I)} \right)^T \underline{\hat{\beta}}_k^{(I)} - 1 \right\} r^{O)^2} + 4 \left(\underline{\hat{\alpha}}_k^{(I)} \right)^T \underline{\hat{\beta}}_k^{(I)}\, r^O + \left(\underline{\hat{\alpha}}_k^{(I)} \right)^T \underline{\hat{\alpha}}_k^{(I)} = 0$$

$$\underline{\hat{x}}^O = \underline{\hat{\alpha}}_k^{(II)} + 2\,\hat{r}^O\,\underline{\hat{\beta}}_k^{(II)}$$

$$d_k^{\text{Punkt}} = \mathsf{A}_k + \mathsf{B}_k\,\hat{r}_k^O + \mathsf{C}_k\,\underline{\hat{x}}_k^O + \mathsf{D}_k\,\underline{\hat{x}}_k^O\,\hat{r}_k^O + \mathsf{E}_k\ \hat{r}_k^{O)^2} + \left(\underline{\hat{x}}^O \right)^T \mathsf{F}_k\,\underline{\hat{x}}_k^O$$

Abbildung 4.5: Zusammenfassung des rekursiven Verfahrens zur Bestimmung aller Positionen einer punktförmigen Landmarke, welche kompatibel mit den a priori gegebenen Fehlergrenzen sind.

Zur Herleitung eines rekursiven Verfahrens zur Bestimmung der Menge aller möglichen Punktreflektoren fehlt nun noch eine vereinfachte Formulierung von d^{Punkt} aus (4.3), welche im folgenden Satz geliefert wird.

SATZ 4.11 *d^{Punkt} aus Satz 4.3 kann durch die Transformation aus Satz 4.10 stark vereinfacht werden und ergibt sich zu*

$$\begin{aligned} d^{Punkt} = 1 &- \underline{\hat{\delta}}^{*T} \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \underline{\hat{\delta}}^{*} - 4\underline{\hat{\delta}}^{*T} \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \underline{\hat{R}}^{*} \hat{r}^{O} + 2\underline{\hat{\delta}}^{*T} \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \mathbf{H}^{*} \underline{\hat{x}}^{O} \\ &+ 4\underline{\hat{R}}^{*T} \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \mathbf{H}^{*} \underline{\hat{x}}^{O} \hat{r}^{O} - 4\underline{\hat{R}}^{*T} \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \underline{\hat{R}}^{*} \left(\hat{r}^{O}\right)^{2} - \left(\underline{\hat{x}}^{O}\right)^{T} \mathbf{H}^{*T} \left(\mathbf{E}^{(I)}\right)^{-1} \mathbf{H}^{*} \underline{\hat{x}}^{O} \end{aligned}$$

BEWEIS. Ähnlich wie Satz 4.10. □

Eine rekursive Formulierung von d^{Punkt} ergibt sich nun als

$$d_k^{\text{Punkt}} = \mathsf{A}_k + \mathsf{B}_k \, \hat{r}_k^O + \mathsf{C}_k \, \underline{\hat{x}}_k^O + \mathsf{D}_k \, \underline{\hat{x}}_k^O \, \hat{r}_k^O + \mathsf{E}_k \left(\hat{r}_k^O\right)^2 + \left(\underline{\hat{x}}^O\right)^T \mathsf{F}_k \, \underline{\hat{x}}_k^O \quad ,$$

mit

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_0 &= 1, \;\; \mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k-1} - w_k \left(\hat{\delta}_k^*\right)^2 , \\ \mathsf{B}_0 &= 0, \;\; \mathsf{B}_k = \mathsf{B}_{k-1} - 4\, w_k \, \hat{R}_k^* \, \hat{\delta}_k^* , \\ \mathsf{C}_0 &= 0, \;\; \mathsf{C}_k = \mathsf{C}_{k-1} + 2\, w_k \, \hat{\delta}_k^* \, \underline{h}_k^{*T} , \\ \mathsf{D}_0 &= 0, \;\; \mathsf{D}_k = \mathsf{D}_{k-1} + 4\, w_k \, \hat{R}_k^* \, \underline{h}_k^{*T} , \\ \mathsf{E}_0 &= 0, \;\; \mathsf{E}_k = \mathsf{E}_{k-1} - 4\, w_k \left(\hat{R}_k^*\right)^2 , \\ \mathsf{F}_0 &= 0, \;\; \mathsf{F}_k = \mathsf{F}_{k-1} - w_k \, \underline{h}_k^* \, \underline{h}_k^{*T} \end{aligned}$$

für $k = 1, \ldots, N$.

Das rekursive Verfahren zur Bestimmung der Positionen einer punktförmigen Landmarke ist in der Abb. 4.5 zusammengefaßt.

Wesentliche Ergebnisse des Kapitels

In diesem Kapitel wurden geschlossene Lösungen 1. für die Bestimmung der Lage eines Roboters aus *reinen* Winkelmessungen und 2. für die Bestimmung von Landmarkenpositionen aus *reinen* Distanzmessungen hergeleitet. Beiden Verfahren ist gemeinsam, daß die Berücksichtigung der auftretenden Unsicherheiten *integraler Bestandteil* der Lösung ist und nicht wie häufig im nachhinein durchgeführt wird.

Winkelmeßsysteme

Das inhärent nichtlineare Problem der Bestimmung der *Lage* eines Beobachters aus N Winkelmessungen zu bekannten Landmarken wurde in ein lineares Problem transformiert. Diese Transformation basiert auf der Separation des nichtlinearen Problems in die Bestimmung der Position und die nachfolgende Bestimmung der Orientierung. Es ergibt sich damit ein System von $N-1$ linearen Gleichungen für die *Position* und ein System von N linearen Gleichungen für die *Orientierung*.

Unsicherheiten in den Landmarkenpositionen und in den Winkelmessungen wurden dabei durch ein mengentheoretisches Modell beschrieben. Durch eine vorab durchgeführte Perturbationsanalyse wurde die Empfindlichkeit der Lageschätzung auf die Unsicherheiten in den Landmarkenpositionen und in den Winkelmessungen ermittelt. Diese Empfindlichkeitsabschätzung wird dann während der Lösung verwendet, um die Unsicherheit in der Lageschätzung zu verringern.

Distanzsensor–Arrays

Zur aktiven Lokalisierung von Umweltmerkmalen wurde ein einfaches und effizientes Verfahren vorgestellt. Das Verfahren ermittelt kartesische Landmarkenpositionen aus Distanzmessungen, welche mit einem Distanzsensor–Array mit beliebiger Sensoranzahl und Geometrie gewonnen werden. Spezielle vereinfachte Lösungen ergeben sich dabei für lineare und planare Arrays. Diese Methode zur Positionsschätzung ist zum einen genauer als rasterbasierte oder angenäherte Verfahren und ist zum anderen weniger rechenintensiv als iterative Methoden.

Unsicherheiten in den Distanzmessungen wurden als unbekannt, aber amplitudenbegrenzt modelliert. Dieses mengenbasierte Vorgehen ist besonders vorteilhaft, wenn systematische Fehler nicht vernachlässigbar sind und die Meßfehler für verschiedene Sensoren voneinander abhängen. Die Wirkung der Meßfehler auf die Positionsschätzung wurde genau untersucht. Die Ergebnisse wurden dann zur Bestimmung von optimalen Gewichtungsmatrizen herangezogen, deren Verwendung zu einer starken Verbesserung der Positionsschätzung aus gestörten Beobachtungen führt.

Zwei Landmarkenprimitive wurden betrachtet: Punktförmige Landmarken und Landmarken, welche im Reflexionsgebiet als eben angesehen werden können. Diese beiden Typen werden mit Hilfe eines mengenbasierten Hypothesentests unterschieden.

In diesem Kapitel wurde nur die Lokalisierung einer einzelnen Landmarke betrachtet, wenn die Zuordnung von Messungen zu Landmarken bereits gegeben ist. Sind mehrere Landmarken vorhanden oder ist die Zuordnung noch unbekannt, muß eine Suche nach der besten Zuordnung durchgeführt werden. Um während der Suche unnötige Wiederholungen von Berechnungen zu vermeiden, wurde eine rekursive Formulierung der vorgestellten effizienten Lokalisierungsalgorithmen angegeben.

Der neue Ansatz ist in der Anwendung nicht auf mobile Roboter beschränkt, sondern kann auch bei bildgebenden akustischen Verfahren, in der Seismik und in der Radarmeßtechnik Verwendung finden.

Kapitel 5

Experimentelle Validierung

Einleitung

Das in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellte Lokalisierungsverfahren wurde auf dem Serviceroboter ROMAN implementiert und in zahlreichen Experimenten validiert. Bei ROMAN handelt es sich um einen omnidirektionalen, mobilen Roboter, welcher im Rahmen des Sonderforschungsbereichs SFB 331 „Informationsverarbeitung in autonomen, mobilen Handhabungssystemen“ an der Technischen Universität München als Experimentierplattform für den Einsatz in Serviceszenarien dient.

Das Projekt ROMAN wurde mit dem Ziel ins Leben gerufen, die notwendigen Schlüsselkomponenten für einen Serviceroboter zu entwickeln, in ein Gesamtsystem zu integrieren und in typischen Szenarien zu erproben. Der entstandene Serviceroboter, vgl. Abb. 5.1 a), ist für den Einsatz in Innenräumen gedacht und dient dort einem Menschen als persönlicher Assistent. Da sich der Roboter damit in einer für Menschen konzipierten Umgebung bewegt, sind dem Menschen vergleichbare Dimensionen, Arbeitsräume und Beweglichkeit notwendig. Außerdem muß der Roboter die Fähigkeit besitzen, sich in einer belebten und nur unvollständig bekannten Umgebung autonom zu bewegen.

Als Lokomotionsplattform wurde ein omnidirektionales Radfahrwerk konzipiert, welches eine hohe Beweglichkeit aufweist und eine Geschwindigkeit von etwa 2 m/s erreicht. Die Plattform basiert auf drei unabhängig voneinander lenkbaren Rädern, von denen nur eines angetrieben wird. Ein Verfahren zur Koordinierung [DA5] sorgt dafür, daß sich die Räder zu jedem Zeitpunkt in einer sinnvollen Konfiguration befinden. Zur Führung des Roboters wird ein Fuzzy–Navigationssystem [DA7, 112] eingesetzt, welches die drei Freiheitsgrade des Roboters in der Translation und der Rotation nutzt. Die resultierende Beweglichkeit ist mit Fahrzeugen vergleichbar, welche auf Spezialrädern wie z.B. MECANUM–Rädern [3] basieren. Durch die Verwendung von konventionellen Rädern mit großem Durchmesser (0.2 m) bewegt sich ROMAN jedoch vibrationsarm und kann unterschiedliche Bodenbeläge bis hin zu Teppichböden befahren.

Während der Durchführung einer Serviceaufgabe muß der Roboter seine Umgebung direkt beeinflussen, d.h. Türen oder Schubladen öffnen, Gegenstände manipulieren, Schalter bedienen und einfache Reinigungsoperationen ausführen. Zu diesem Zweck ist er mit einem sechsachsigen Manipulator ausgerüstet, dessen Abmessungen und Bewegungsfreiheitsgrade dem menschlichen Arm entsprechen. Um den beschränkten Arbeitsbereich des Manipulators zu erweitern, wird dieser beim Ausführen einer gewünschten Bewegung ggf. durch eine Hoch/Tief–Linearachse und die Lokomotionsplattform unterstützt.

ROMAN ist für einen autarken Betrieb von bis zu vier Stunden geeignet, da er über eine bordeigene Energieversorgung verfügt. Außerdem können Experimentdaten über eine Funkverbindung an die Außenwelt übermittelt werden.

Die Lokalisierung von ROMAN stellt auf der einen Seite eine Herausforderung an die Entwicklung von Hard– und Softwarekomponenten dar, wenn die potentiell verfügbare hohe Manövrierfähigkeit im praktischen Einsatz genutzt werden soll. Ein wesentlicher Grund dafür

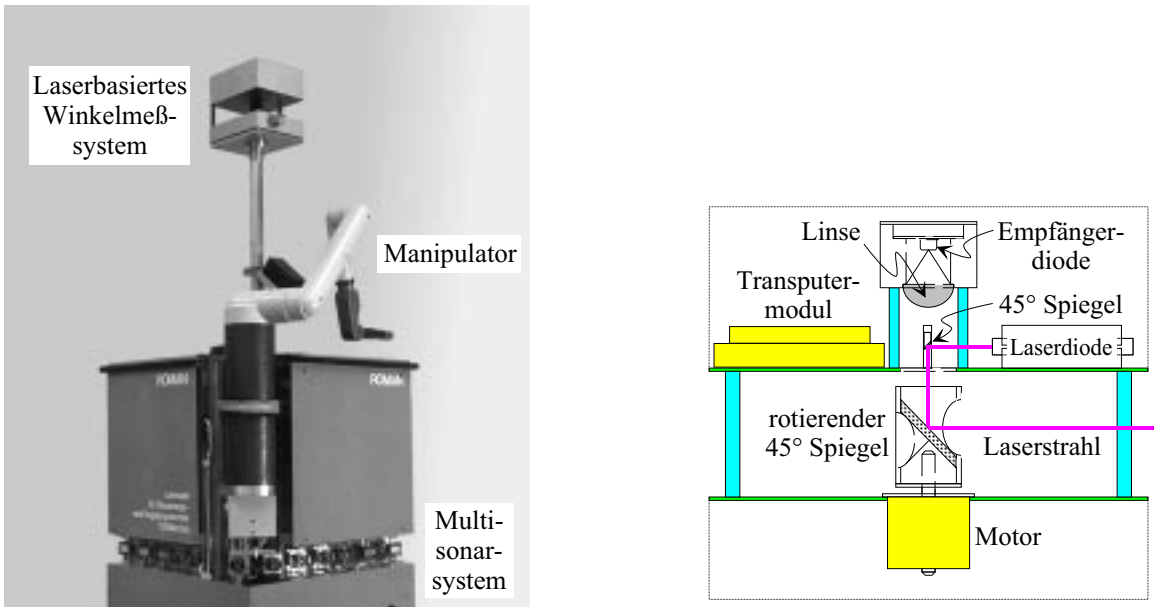


Abbildung 5.1: a) Der mobile Serviceroboter ROMAN. b) Schema des verwendeten laserbasierten Winkelmeßsystems.

ist die bei diesem Robotertyp prinzipbedingte Ungenauigkeit der Lokalisierung durch Fortschreibung einer bekannten Anfangslage auf der Basis von Odometriesensoren. Der Großteil einer schritthaltenden Lokalisierung muß also von Geometriesensoren zur Vermessung von Umweltmerkmalen getragen werden.

Auf der anderen Seite bietet die Entwicklung einer Lokalisierungseinrichtung für den Serviceroboter ROMAN eine große Chance. Gelingt die Bereitstellung eines geeigneten Systems für diesen Prototypen, so könnten Derivate davon in einer ganzen Klasse von Robotern in zukünftigen Anwendungen eingesetzt werden. Außerdem ergibt sich durch den Einsatz im Rahmen des Sonderforschungsbereichs die Möglichkeit einer intensiven Evaluierung in typischen Situationen unter realen Einsatzbedingungen.

5.1 Multisensorsystem

Zur Bestimmung der inkrementellen Lageänderung des Roboters stehen ein Odometriesystem und ein Kreisel zur Verfügung. Das Odometriesystem beruht dabei ausschließlich auf den Tragrädern, da wegen der Omnidirektionalität des Roboters keine separaten Meßräder verwendet werden können.

Geometriesensoren zur Verwendung auf ROMAN müssen die folgenden Anforderungen erfüllen. Sie müssen

- einfach, wartungsarm und preiswert sein,

- ◇ dürfen keine Vorzugsrichtung aufweisen,
- ◇ eine geeignete Reichweite besitzen,
- ◇ und bei variierenden Umgebungsbedingungen mit gleichbleibender Genauigkeit arbeiten.

Die Wahl fiel deshalb auf zwei aktive Sensorsysteme, die nach unterschiedlichen physikalischen Prinzipien arbeiten. Ein laserbasiertes Winkelmeßsystem dient der Lokalisierung von ROMAN an künstlichen, passiven Landmarken. Zur Lokalisierung des Roboters an natürlichen Landmarken und zur Detektion unerwarteter Hindernisse dient ein Ultraschallsensor–Array. Durch die Verwendung von zwei verschiedenen Meßsystemen ergibt sich zum einen eine höhere Genauigkeit sowie ein stabileres Lokalisierungsergebnis. Zum anderen bietet sich während der Entwicklung die Möglichkeit der vergleichenden Evaluierung, so daß manuellen Referenzmessungen nur noch eine untergeordnete Rolle zukommt [DA8].

Die Sensoren sind an ein Transputer–Netzwerk angebunden, welches über den Roboter verteilt ist. Dies ermöglicht die Datenverarbeitung „vor Ort“, wodurch lange und störanfällige analoge Signalleitungen vermieden werden.

Im folgenden werden nun die drei Bestandteile des Multisensorsystems, 1. Odometrie und Kreisel, 2. laserbasiertes Winkelmeßsystem und 3. Ultraschallsensor–Array kurz vorgestellt und die Hauptunsicherheitsquellen diskutiert.

5.1.1 Odometrie und Kreisel

Der Roboter ROMAN ist mit einem Odometriesystem versehen, welches die zurückgelegten Wege und Lenkwinkel aller drei Räder mißt. Aus diesen Größen werden mit Hilfe des in Abschnitt 3.4 vorgestellten Koppelnavigationsverfahrens die Lageänderungen des Roboters in Bezug auf eine bekannte Anfangslage bestimmt.

Zusätzlich ist ROMAN mit einem einfachen, piezoelektrischen Kreisel ausgestattet. Dieser liefert eine der aktuellen Winkelgeschwindigkeit proportionale Ausgangsgröße, so daß durch deren Integration die Orientierungsänderung des Roboters berechnet werden kann.

Meßunsicherheiten von Odometrie und Kreisel

Das Odometriesystem leidet hauptsächlich unter systematischen Fehlern, welche durch 1. unsichere Rad/Boden–Kontaktpunkte, 2. unsichere effektive Raddurchmesser und 3. Abweichungen in der Koordinierung der drei Räder bedingt sind. Die Verwendung relativ breiter Räder (4 cm) führt zu den im ersten Punkt aufgeführten Unsicherheiten, da nicht davon ausgegangen werden kann, daß die Räder exakt in der Mitte ablaufen. Schmutzablagerungen und Abrieb führen weiterhin zu einer Veränderung des effektiven Raddurchmessers. Die ersten beiden Punkte treffen auf die meisten radbasierten mobilen Roboter zu. Bei ROMAN wirken sich diese Fehler wegen geringer Radabstände aber besonders stark aus. Der dritte Punkt ist eine Besonderheit von Robotern mit mehreren gelenkten Rädern: Durch Abweichungen bei der Koordinierung der drei Räder schneiden sich die Radnormalen nicht exakt in einem Punkt, was zu Unsicherheiten in der Lage des momentanen Drehzentrums des Roboters führt, vgl. Abschnitt 3.4.

Die Umdrehungen und Lenkwinkel der einzelnen Räder werden über Digital–Encoder gemessen. Dabei entstehende Quantisierungsfehler sind wegen der gewählten hohen Auflösung vernachlässigbar [DA5].

Die vom Kreisel gemessene Winkelgeschwindigkeit ist mit einem zeitvarianten Offset behaftet, so daß durch die nachfolgende Integration ein stark korrelierter Fehler in der geschätzten Roboterorientierung entsteht, der über alle Grenzen wächst. Als Gegenmaßnahme wird bei jedem Roboterstillstand dieser Offset automatisch geschätzt und bei der nachfolgenden Fahrt zur Korrektur verwendet. Damit ergeben sich typische Orientierungsfehler von etwa 150^o pro Stunde.

Um die Winkelgeschwindigkeit zu erhalten, muß die Ausgangsgröße des Kreisels mit einem Skalierungsfaktor multipliziert werden. Auch dieser Skalierungsfaktor ist zeitvariant und ändert sich in einem Bereich von $\pm 2.5\%$. Weiterhin leidet der verwendete Kreisel unter einer extremen Temperaturabhängigkeit von etwa $\frac{0.1^o}{s}/^oC$. Die daraus resultierende Abhängigkeit der gemessenen Winkelgeschwindigkeit von der Umgebungstemperatur konnte aber durch eine Festwertregelung der Kreiseltemperatur signifikant verringert werden.

Durch Integration der skalierten Ausgangsgröße des Kreisels ergibt sich also ein Schätzwert $\hat{\psi}_k^{\Delta,\text{Kreisel}}$ für die Änderung der Roboterorientierung in einem Abtastintervall. Zusammen mit den obigen, experimentell ermittelten Kreiselunsicherheiten kann zusätzlich ein Unsicherheitsintervall und damit eine Menge von Koppelnavigationsinkrementen durch

$$\mathcal{X}_k^{\Delta,\text{Kreisel}} = \left\{ \underline{x}_k^{\Delta,\text{Kreisel}} : x_k^{\Delta,\text{Kreisel}},\ y_k^{\Delta,\text{Kreisel}} \text{ beliebig},\ \left| \psi_k^{\Delta,\text{Kreisel}} - \hat{\psi}_k^{\Delta,\text{Kreisel}} \right| < \delta_k^{\text{Kreisel}} \right\}$$

angegeben werden. Es handelt sich dabei um zwei zur x/y–Ebene des Roboterkoordinatensystems zum Zeitpunkt $k-1$ parallele Ebenen, die um $2\,\delta_k^{\text{Kreisel}}$ separiert sind.

Das in Abschnitt 3.4 beschriebene odometriebasierte Koppelnavigationsverfahren wird für die Verwendung mit ROMAN mit dessen Radpositionen und den maximalen Fehlern bei den Rad/Boden–Kontaktpunkten parametriert. Für den Raddurchmesser wird eine Veränderung um maximal 4 mm angenommen. Die aus den Odometriedaten resultierenden Koppelnavigationsinkremente $\underline{x}_k^{\Delta,\text{Odo}}$ werden zu jedem Zeitpunkt mit $\underline{x}_k^{\Delta,\text{Kreisel}}$ fusioniert. Damit prädiziert das Verfahren auf einer Fahrtstrecke von einem Meter in Abhängigkeit vom durchgeführten Fahrmanöver typischerweise Unsicherheiten von 20 mm – 50 mm in der Position quer zur Fahrtrichtung, 10 mm – 20 mm längs zur Fahrtrichtung. Bei einer Rotation des Roboters werden als typische Grenzen für die Orientierungsabweichungen 4^o – 8^o pro 360^o berechnet. In Experimenten wurde eine gute Übereinstimmung dieser prädizierten mit den realen Abweichungen festgestellt.

5.1.2 Winkelmeßsystem

Zur Lokalisierung ist ROMAN mit einem laserbasierten Winkelmeßsystem [DA4] ausgestattet, welches die Winkel zu künstlichen vertikalen Landmarken bestimmt. Das Funktionsprinzip ist in der Abb. 5.1 b) dargestellt. Ein kontinuierlich ausgesendeter Laserstrahl wird von einem schnell rotierenden Umlenkspiegel abgelenkt und tastet so die Umgebung in einer horizontalen Ebene mit einer Reichweite von 20 m ab. Der Umlenkspiegel rotiert dabei mit 20 Umdrehungen pro Sekunde. Trifft der Strahl auf eine Landmarke, so wird dies von einer Empfangsdiode detektiert. Als Landmarken werden retro–reflektierende Streifen von 4 cm Breite verwendet, wobei diese von dem Meßsystem nicht unterschieden werden können. Zur Verringerung von Verdeckungen ist das System auf einer Höhe von 1.8 m über dem Boden auf dem Roboter montiert.

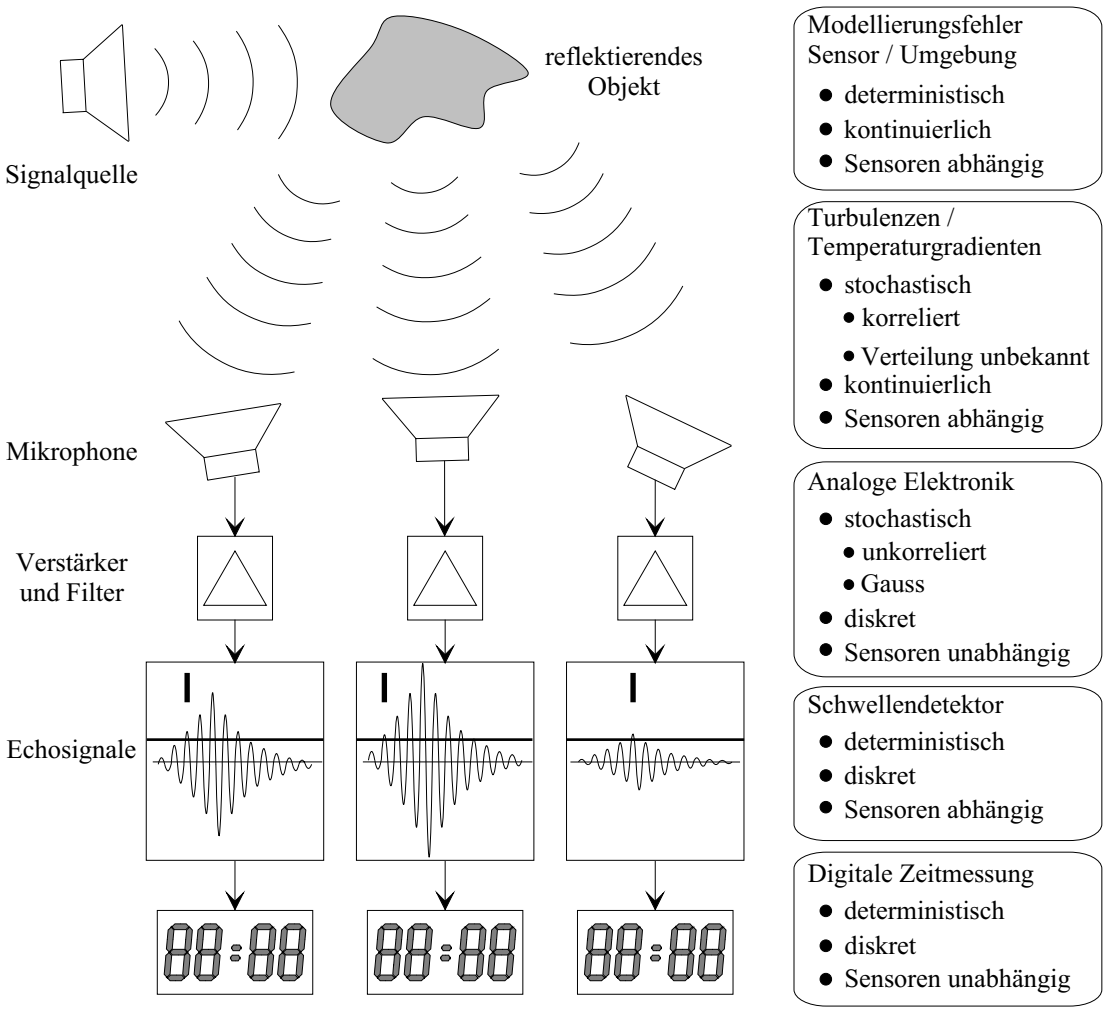


Abbildung 5.2: Meßkette eines Ultraschallsensor–Arrays und Meßunsicherheiten.

Meßunsicherheiten im Winkelmeßsystem

Die Hauptunsicherheitsquelle für das Winkelmeßsystem ist durch Fehler in der angenommenen Position der Landmarken gegeben. Unsicherheiten im Meßvorgang entstehen wegen einer hohen absoluten Meßgenauigkeit nur durch Vibrationen im Aufbau beim Überfahren von Bodenunebenheiten. Diese stochastischen Meßunsicherheiten sind wegen der hohen Meßrate vernachlässigbar gegenüber den durch ungenau bekannte Landmarkenpositionen und Unzulänglichkeiten bei der Kalibrierung auftretenden systematischen Fehlern.

Für die Positionen der Landmarken ergeben sich während des Einmeßvorgangs Unsicherheiten zwischen ±20 mm und ±30 mm. Als Fehlergrenzen für die Winkelmessung werden die in [DA4] ermittelten Werte von $\pm 0.02^o$ angenommen.

5.1.3 Ultraschallsensor–Array

ROMAN ist mit einem Array von akustischen Signalquellen und Mikrophonen versehen, welche auf einheitlicher Höhe auf der Außenhaut des Roboters befestigt sind [110, 111, DA2]. Dieses Multisonarsystem beruht auf dem Puls–Echo–Prinzip und besteht aus jeweils 24 identischen Quellen und Mikrophonen mit einer Trägerfrequenz von 40 kHz. Die maximale Reichweite beträgt je nach Objekttyp etwa 3 – 4 m. Jede Signalquelle ist mit einer Ansteuerschaltung zur Pulserzeugung versehen, jedes Mikrophon ist mit einem analogen Echodetektor

verbunden. Nachgeschaltete digitale Zähler, welche in den Adreßraum von vier Transputern eingeblendet sind, bestimmen die einzelnen Pulslaufzeiten. Die zu einem lokalen Netzwerk verschalteten Transputer übernehmen die Konfigurierung des Systems, die Bestimmung der Sendezeitpunkte und die Verarbeitung der gemessenen Pulslaufzeiten [DA6].

Meßunsicherheiten im Ultraschallsensor–Array

In der Abb. 5.2 ist die Meßkette des Ultraschallsensor–Arrays schematisch dargestellt. Es lassen sich fünf Hauptfehlerquellen identifizieren:

- ◇ **Modellierungsfehler Sensor/Umgebung:** Bei der Bestimmung der Lage realer Objekte werden gemäß Abschnitt 4.2 in Kapitel 4 zwei einfache Modelle für die Interaktion zwischen Sensor und Umgebung verwendet. Es wird dabei angenommen, daß die Objekte schallhart sind und eine Spiegelreflexion stattfindet. Rauhe Oberflächen und „weiche“ Körper führen zu Abweichungen von der Modellvorstellung und damit zu Meßfehlern. Diese Meßfehler sind deterministischer Natur, wertekontinuierlich und die Fehler für unterschiedliche Sensorelemente sind voneinander abhängig.

- ◇ **Meßkanal:** Durch Turbulenzen und Temperaturgradienten im Luftraum zwischen den Sensoren und den Objekten kommt es zu Fehlern in den gemessenen Distanzen. Diese Fehler sind stochastischer Natur, stark korreliert und haben eine unbekannte Verteilung. Weiterhin sind diese Fehler wertekontinuierlich und für unterschiedliche Sensoren voneinander abhängig.

- ◇ **Analoge Elektronik:** Durch rauschende elektronische Bauteile (Verstärker, passive Bauteile, ...) ergeben sich stochastische, kontinuierliche Störungen, welche für unterschiedliche Sensoren voneinander unabhängig sind.

- ◇ **Echodetektion:** Zur Detektion der Echos werden einfache, handelsübliche Schwellendetektoren verwendet, so daß die Detektionszeitpunkte und damit die gemessenen Entfernungen von der Echoamplitude abhängen. Da es sich bei dem Echo um ein amplitudenmoduliertes 40 kHz Signal handelt, variieren die gemessenen Entfernungen allerdings nicht kontinuierlich mit der Empfangsamplitude, sondern weisen Sprünge von jeweils einer Wellenlänge[8)] auf, Abb. 5.2. Die dadurch entstehenden deterministischen Fehler sind wertediskret und für unterschiedliche Sensoren voneinander abhängig.

- ◇ **Zeitmessung:** Der Zeitraum zwischen dem Aussenden eines Pulses und der Detektion seines Echos an einem Empfänger wird mit Hilfe von digitalen Zählern gemessen. Die dabei auftretenden Quantisierungsfehler sind deterministisch, wertediskret und für verschiedene Empfänger voneinander unabhängig.

Die deterministischen Fehler durch den verwendeten Echodetektor und die Modellierungsfehler stellen den größten Teil der Unsicherheiten dar. Außerdem treten die stochastischen Unsicherheiten durch die konsequente Verwendung der in Abschnitt 3.6.3 beschriebenen Zeitmultiplex–Meßverfahren weiter in den Hintergrund, so daß es sich hier anbietet, mengenbasierte Verfahren zur Verarbeitung der Sensordaten einzusetzen.

Experimentell wurde gezeigt, daß die typischen maximalen Fehler bei der Echodetektion 2 – 3 Wellenlängen, d.h. 17 mm – 25 mm, betragen. Im Rahmen der Fusion wird daher davon ausgegangen, daß bei Hinzunahme der stochastischen Meßunsicherheiten die Entfernungsmeßfehler auf ± 20 mm begrenzt sind. Für die Unsicherheiten bei der Modellierung der

[8)] Die Wellenlänge beträgt 8.5 mm bei einer Schallgeschwindigkeit von etwa 340 m/s.

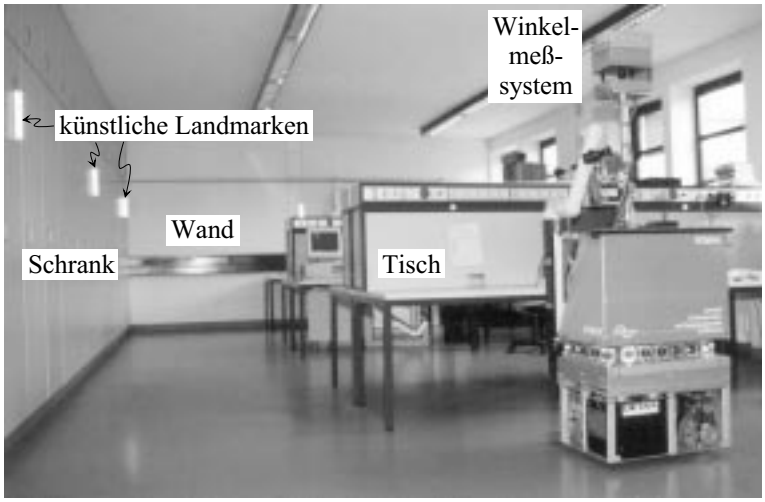


Abbildung 5.3: Eine Aufnahme der Experimentierumgebung mit den verwendeten künstlichen Landmarken und den natürlichen Landmarken wie ◇ Wände, ◇ Schränke und ◇ Tische.

Umgebung werden bei Wänden ±30 mm – ±50 mm für die Position des Ankerpunktes und $\pm 1^o$ – $\pm 3^o$ für die Orientierung angenommen.

5.2 Langstreckenexperiment: Flächendeckende Inspektion

Zur Demonstration der Praxistauglichkeit der vorgestellten Lokalisierungsalgorithmen wurden mit dem mobilen Roboter ROMAN flächendeckende Langstreckenexperimente durchgeführt. Das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Experiment besteht in der Bewältigung eines kurvenreichen Kurses von mehr als einem Kilometer Länge, welcher ohne Stop in etwa 45 Minuten durchfahren wird.

Zur Lokalisierung des Roboters wird die in der Abb. 3.24 dargestellte Struktur verwendet. Um im Rahmen des Experimentes auf manuelle Referenzmessungen verzichten zu können, wird durch Auftrennen einiger geeigneter Verbindungen erzwungen, daß nur noch die Fusionsknoten der Ultraschallsensor–Arrays miteinander kommunizieren können. Zur Navigation des Roboters wird lediglich die fusionierte Lageschätzung auf der Basis der Ultraschalldaten verwendet, die auf den Daten des Lasernavigationssystems beruhende Lageschätzung dient als unabhängige Referenz. Experimentelle Ergebnisse zur Navigation auf Basis der Daten des Lasernavigationssystem finden sich in [116, 120].

Es ist zu betonen, daß diese Auftrennungen nur vorgenommen werden, um die Aussagekraft des Experimentes zu erhöhen. In einer praktischen Applikation wird aus den in Abschnitt 3.7.1 aufgeführten Gründen natürlich ein voll konnektives Fusionsnetzwerk vorgezogen.

Die Experimentierumgebung ist in der Abb. 5.3 dargestellt. Als Landmarken zur Lokalisierung des Roboters werden künstliche Marken für das Lasernavigationsystem und natürlich vorhandene Gegenstände wie Wände, Schränke und Tische für das Multisonarsystem verwendet. Die für das Experiment verwendete Landmarkenkarte ist in der Abb. 5.4 a) dargestellt.

Während der Inspektionsaufgabe folgt der Roboter dem in der Abb. 5.4 b) dargestellten flächendeckenden Sollkurs, welcher mit dem Verfahren aus [109] automatisch generiert wurde. Um die unbegrenzte Langzeitstabilität des Verfahrens zu zeigen, wurde der Kurs mit

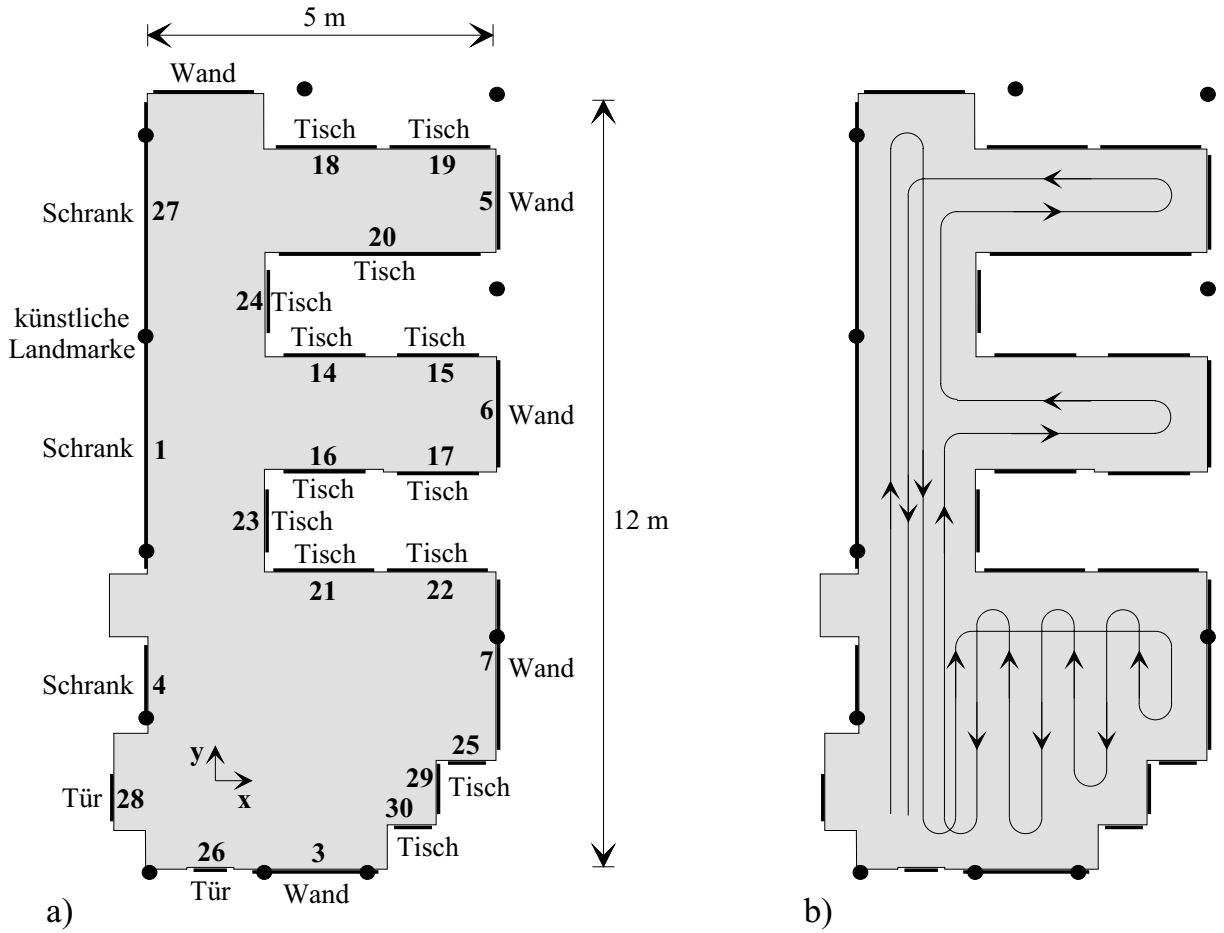


Abbildung 5.4: a) Karte der in der Umgebung befindlichen künstlichen Landmarken und der natürlichen Landmarken wie ◇ Wände, ◇ Schränke und ◇ Tische. b) Der zur flächendeckenden Bearbeitung geplante Kurs.

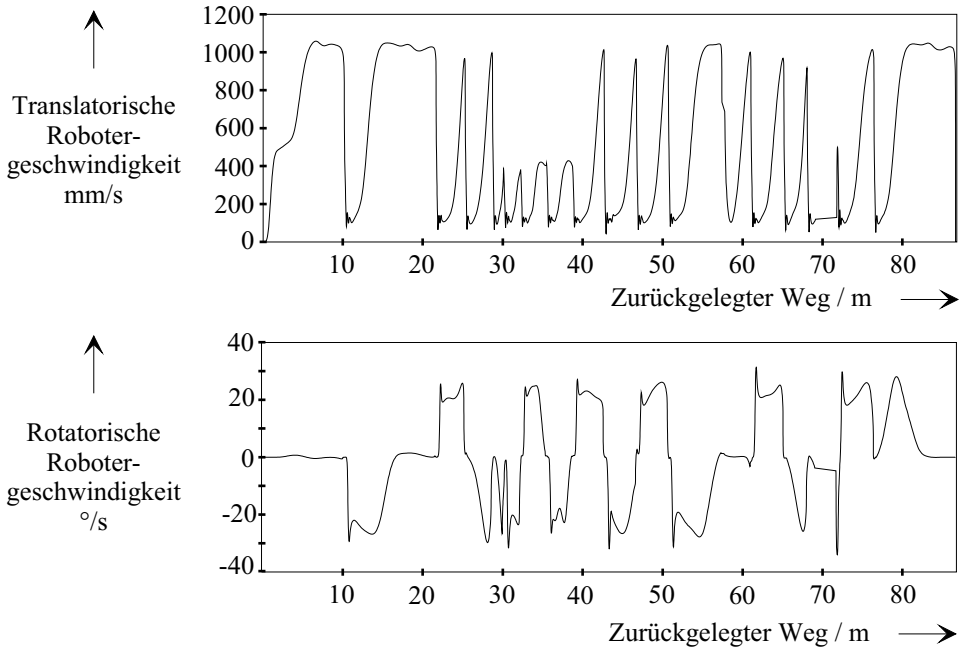


Abbildung 5.5: Verlauf der momentanen Fahrzeuggeschwindigkeiten über den Kurs. a) Translatorische Geschwindigkeit. b) Rotatorische Geschwindigkeit.

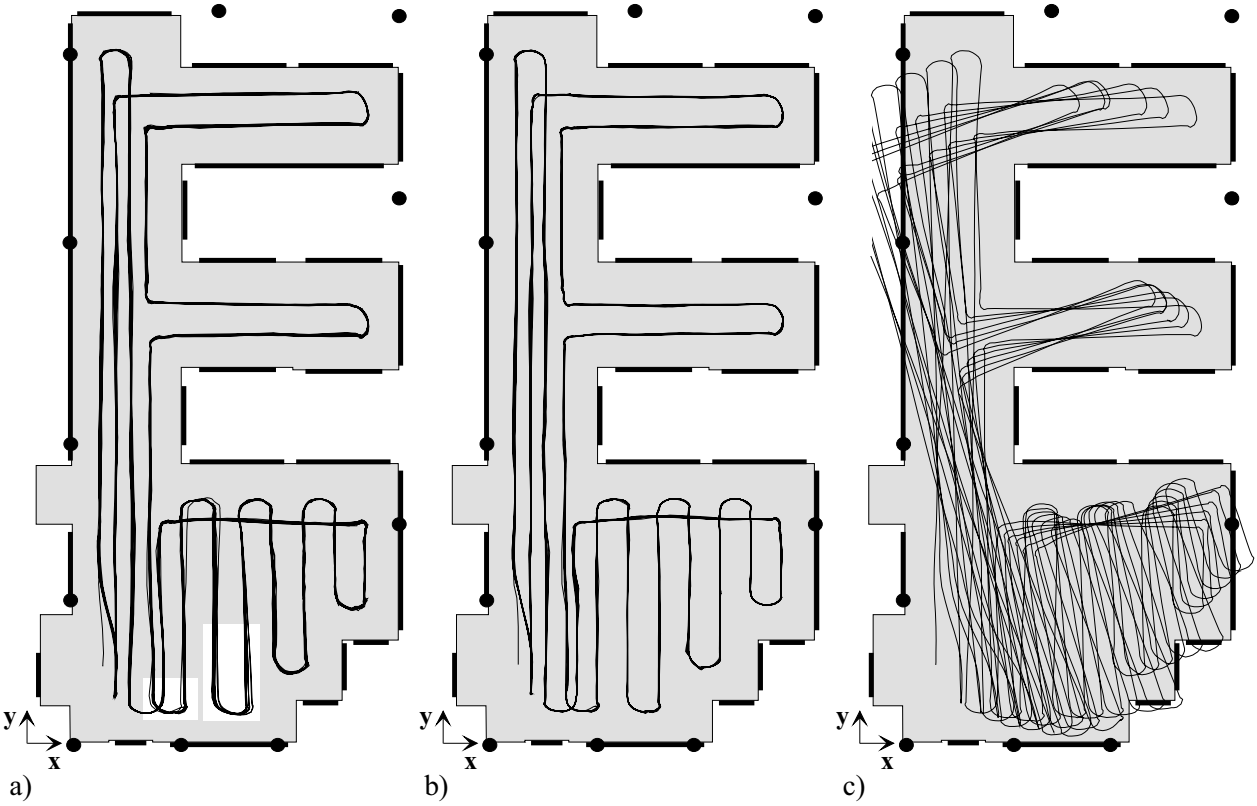


Abbildung 5.6: a) Ergebnis der Lageschätzung mit Hilfe des Lasernavigationssystems für 12 Runden. b) Ergebnis der Lageschätzung mit Hilfe des Multisonarsystems für 12 Runden. c) Ergebnis der Integration der Lageinkremente aus der Koppelnavigation (Darstellung nach 6 Runden abgebrochen).

einer Nominalgeschwindigkeit von 1000 mm/s vom Roboter repetierend durchfahren. Nach 12 Runden beträgt die gesamte zurückgelegte Strecke 1048.3 m. Der Gesamtkurs mit 132 180^o–Kurven und 72 90^o–Kurven wird in etwa 45 Minuten zurückgelegt. Den Verlauf der Momentangeschwindigkeit über den Kurs zeigt die Abb. 5.5. Man erkennt, daß der Roboter während enger Kurven die Nominalgeschwindigkeit nicht halten kann, so daß sich für den gesamten Kurs eine mittlere Geschwindigkeit von etwa 400 mm/s ergibt. Weiterhin wird deutlich, daß in den Kurven hohe Winkelgeschwindigkeiten von etwa 30^o/s auftreten.

Die Ergebnisse der Lageschätzung des Referenzmeßsystems, d.h. des Lasernavigationssystems, sind in der Abb. 5.6 a) gezeigt. Diese Ergebnisse werden lediglich zur Überprüfung der Lageschätzung mit Hilfe des Multisonarsystems herangezogen und stehen dem Fahrzeug nicht zur Navigation zur Verfügung. Die Ergebnisse der Lageschätzung mit Hilfe des Multisonarsystems, welche dem Roboter in diesem Experiment als Grundlage der Navigation diente, sind in der Abb. 5.6 b) dargestellt, wobei hier willkürlich die Daten des ersten Fusionsknotens gewählt wurden. An den hell hinterlegten Stellen reichen die vorhandenen natürlichen Landmarken nicht aus, um mit dem Multisonarsystem eine dem Lasernavigationssystem vergleichbare Genauigkeit zu erzielen. Befinden sich hingegen geeignete Landmarken im Einzugsbereich des Multisonarsystems, so ist die erzielte Genauigkeit nicht wesentlich schlechter als die des Lasernavigationsystems.

Zum Vergleich wurden die Lageinkremente der Koppelnavigation aufintegriert und in der Abb. 5.6 c) dargestellt. Es wird deutlich, daß die Koppelnavigationsfehler während der Fahrt akkumulieren und stark korrelierter Natur sind.

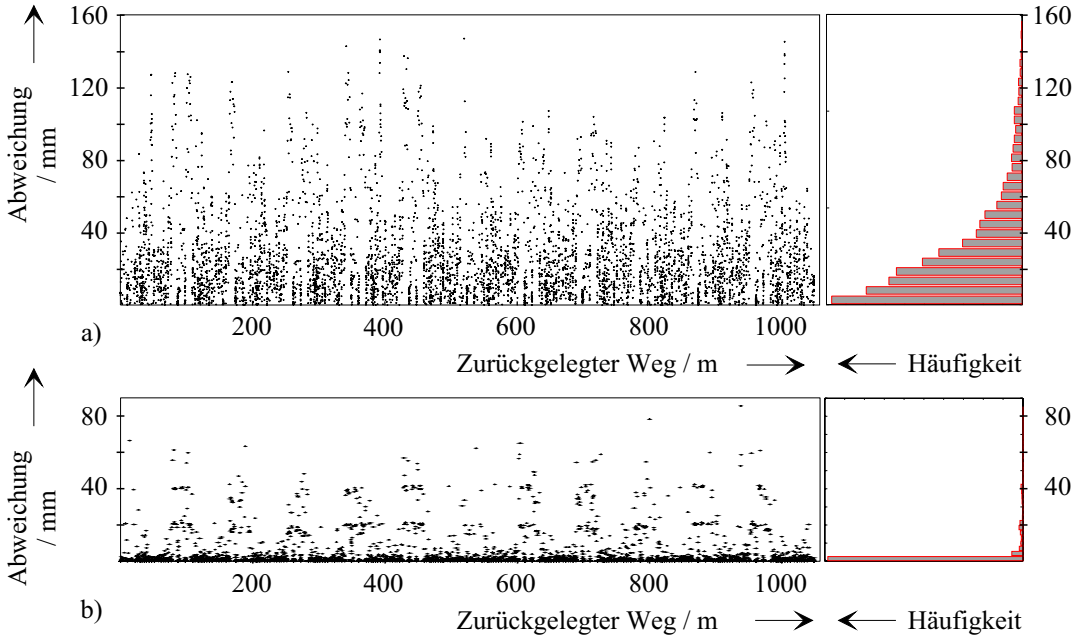


Abbildung 5.7: a) Vergleich der Daten des Fusionsknotens Lasernavigation mit dem ersten Fusionsknoten des Multisonarsystems. b) Vergleich der Daten des ersten und des zweiten Fusionsknoten des Multisonarsystems (alle 12 Runden). Jeweils euklidische Distanz zwischen den Positionsschätzungen für einen Abtastzeitschritt.

Die Abweichungen zwischen den Lageschätzungen basierend auf dem Lasernavigationssystem und dem Multisonarsystem sind in der Abb. 5.7 a) gezeigt. Große Abweichungen (> 50 mm) entstehen in den bereits angesprochenen Bereichen, welche in der Abbildung Abb. 5.6 a) hell hinterlegt sind. Die Unterschiede zwischen den Lageschätzungen der einzelnen Fusionsknoten für das Multisonarsystem sind dagegen sehr gering, wie für die ersten beiden Fusionsknoten in der Abb. 5.7 b) gezeigt.

Um ein Gefühl für die Größen der von dem Lokalisierungsverfahren berechneten Roboterlagemengen zu vermitteln, sind in der Abb. 5.8 die Positionsunsicherheiten für beide Meßverfahren dargestellt. Diese wurden als die Wurzel des Volumens der Projektionen der geschätzten Roboterlagemengen auf die x/y–Ebene des Inertialkoordinatensystems bestimmt.

Wesentliche Ergebnisse des Kapitels

Das vorgeschlagene Verfahren zur Lokalisierung wurde auf dem Serviceroboter ROMAN implementiert und in Langstreckenexperimenten zur flächendeckenden Inspektion validiert. Bei der Vorstellung des dazu erforderlichen Multisensorsystems wurde kurz auf die einzelnen Komponenten eingegangen, das Hauptaugenmerk aber auf die Diskussion der vorliegenden Meßunsicherheiten gelegt.

Die Aussagekraft der Experimente wurde durch die unabhängige Lokalisierung von ROMAN mittels Multisonarsystem und Lasernavigationssystem erhöht. Hierzu wurde die Flexibilität des dezentralen Fusionsschemas genutzt, um Kommunikationskanäle zwischen den Fusionsknoten derart aufzutrennen, daß zwei autonome Subnetze zur Fusion entstehen. Eines dieser Fusionsnetze verarbeitet die Daten des Multisonarsystem, das andere die Daten des Lasernavigationssystems. Zur Navigation wurden dem Roboter nur die Lageschätzungen

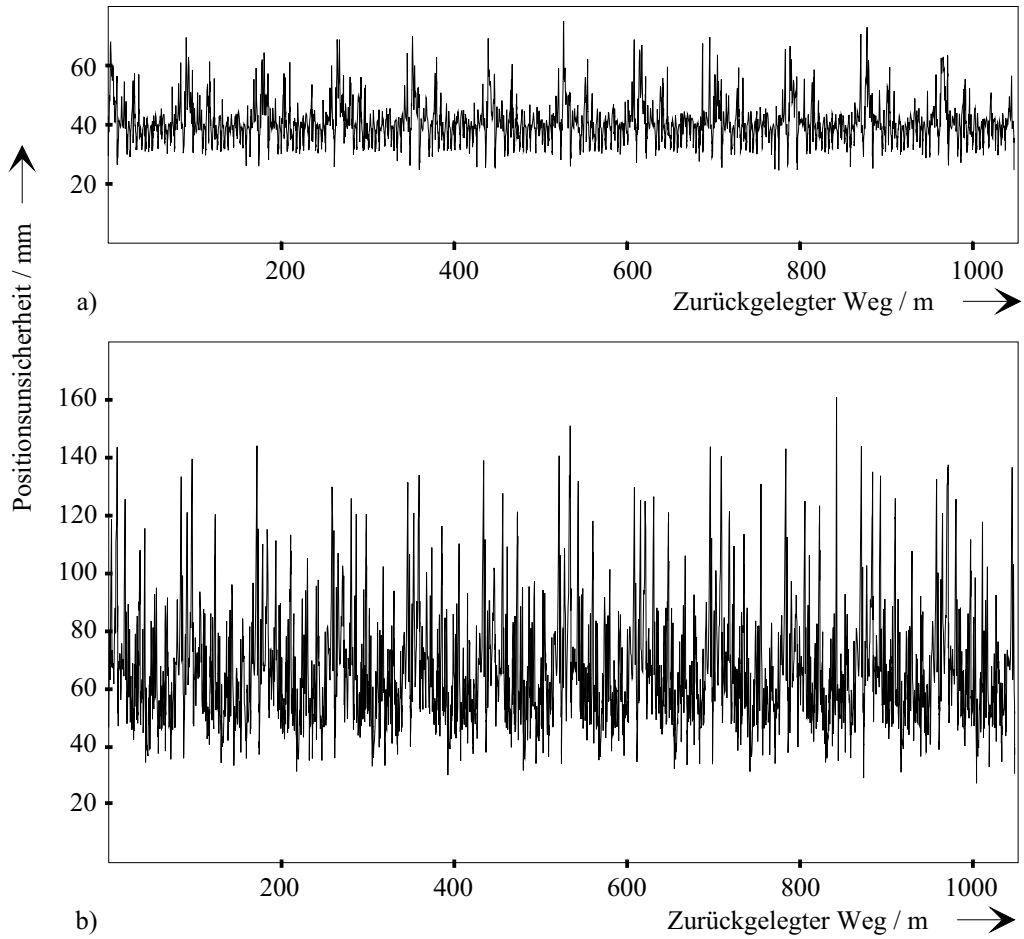


Abbildung 5.8: Die berechneten Positionsunsicherheiten für die Lokalisierung mit a) Lasernavigationssystem, b) Multisonarsystem (alle 12 Runden).

auf Basis der Daten des Multisonarsystems zur Verfügung gestellt, die Lageschätzungen auf Basis der Daten des Lasernavigationssystems dienten als Referenz.

Die Experimente zeigen die *hohe Genauigkeit* und die *unbegrenzte Langzeitstabilität* des vorgeschlagenen Lokalisierungsverfahrens. Weiterhin wird deutlich, daß auch bei stark korrelierten oder systematischen Meßunsicherheiten ein realistisches Maß für die Unsicherheit der Roboterlageschätzung angegeben wird. Diese Eigenschaft wird genutzt, um z.B. zu entscheiden, ob Engstellen sicher passierbar sind.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein integriertes Verfahren zur Initialisierung und rekursiven Stützung der Schätzung der Lage eines in der Ebene beweglichen mobilen Roboters mit Hilfe eines bordeigenen Multisensorsystems entwickelt. Hierbei konnten für zwei weit verbreitete Geometriesensoren, nämlich Winkelmeßsysteme und Distanzsensor–Arrays beliebiger Geometrie, eine Reihe neuer Erkenntnisse gewonnen werden.

Zur Initialisierung der Lageschätzung wurde ein effizientes Verfahren vorgestellt, welches auf einem Satz von $N > 3$ gemessenen Winkeln beruht, wobei aber die Zuordnung von gemessenen Winkeln zu Umweltmerkmalen zunächst nicht bekannt ist. Auf der Basis einer Umweltkarte, in welcher bekannte Merkmale als Landmarken verzeichnet sind, bestimmt ein schnelles Suchverfahren diese Zuordnung und damit die initiale Roboterlage. Dabei stellt eine neue geschlossene Lösung für die Berechnung von Roboterlagewerten aus Winkelmessungen den Kern dieses Verfahrens dar. Das Initialisierungsverfahren berücksichtigt die mögliche Verdeckung von Landmarken ebenso wie Fehlmessungen und kann damit auch in nichtkonvexer Umgebung eingesetzt werden.

Nach erfolgter Initialisierung wird die Roboterlage während der Fahrt durch ein Koppelnavigationsverfahren fortgeschrieben, welches die systematischen Fehler bei der inkrementellen Lageschätzung berücksichtigt. Neben der allgemeinen Vorgehensweise wurde auch ein speziell auf omnidirektionale Roboter zugeschnittenes Koppelnavigationsverfahren vorgestellt. Wegen des fehlenden Umweltbezugs kommt es prinzipbedingt zu akkumulierenden Fehlern, so daß die Roboterlageschätzung ständig durch die Daten der Geometriesensoren gestützt wird, um die erforderliche Genauigkeit zu gewährleisten. Hierzu wird eine Form der rekursiven Roboterlageschätzung vorgestellt, welche die Lageprädiktion aus der Koppelnavigation zur Sensoreinsatzplanung verwendet. Vor jeder Messung werden aus der Umweltkarte automatisch 1. geeignete Landmarken ausgewählt, 2. virtuelle Sensoren zur Vermessung dieser Landmarken durch Konfigurierung des Sensorsystems gebildet, dann 3. die Messung im interessierenden Bereich durchgeführt und mit Hilfe des Meßergebnisses 4. die prädizierte Roboterlage korrigiert. Dadurch wird die Lageschätzung unanfällig gegen Meßausreißer, wobei gleichzeitig eine drastische Erhöhung der Meßrate erreicht wird. Insbesondere wurde ein Zeitmultiplex–Meßverfahren entwickelt, welches selbst mit einfachen Ultraschall–Sensoren Abtastraten von 450 Hz pro Landmarke zuläßt.

Neben der geschlossenen Lösung für die Bestimmung der Lage eines Beobachters aus N Winkelmessungen zu bekannten Landmarken konnte auch für die Bestimmung der Lage einfacher Landmarken mit Hilfe eines Distanzsensor–Arrays mit beliebiger Sensoranzahl und Geometrie eine geschlossene Lösung gefunden werden. Beide Problemstellungen führen zunächst auf nichtlineare, überbestimmte Gleichungssysteme, welche üblicherweise mit iterativen Methoden gelöst werden. In dieser Arbeit wurden jedoch exakte analytische Lösungsalgorithmen hergeleitet. Beiden Lösungsalgorithmen ist gemeinsam, daß die auftretenden Unsicherheiten als integraler Bestandteil während der Lokalisierung berücksichtigt werden.

Zur Fusion der Daten verschiedener Sensoren in einem Multisensorsystem wurde ein dezentrales Fusionsschema vorgestellt. Hierbei wurde als Alternative zu statistisch motivierten Fusionsverfahren der Entwurf auf der Basis mengentheoretischer Konzepte vorgeschlagen. Diese Vorgehensweise ergibt nichtlineare Filter geringer Komplexität auch für den Fall, daß ein Zustand aus Beobachtungen geschätzt wird, welche durch systematische oder stark korrelierte Fehlerquellen gestört sind. Das zum Entwurf notwendige Handwerkszeug wurde mit einer bisher nicht bekannten Vollständigkeit und Einfachheit in Kapitel 2 dargestellt. Zur Approximation der tatsächlichen Lösungsmengen wurden Ellipsoide und deren degenerierte Formen verwendet, was zu effizienten Algorithmen führt, die in einem mobilen System in Echtzeit abgearbeitet werden können. Für alle im Zusammenhang mit Ellipsoiden und deren degenerierten Formen auftretenden Aufgaben wie 1. die Detektion der Überlappung, 2. die Berechnung von Hüllellipsoiden für die Schnittmenge, und 3. die Approximation der MINKOWSKI–Summe wurde ein einheitlicher Lösungsformalismus entwickelt, welcher zu neuen rekursiven Lösungsalgorithmen für eine beliebige Problemdimension führt.

Das vorgestellte Lokalisierungsverfahren wurde auf dem omnidirektionalen mobilen Serviceroboter ROMAN hard– und softwareseitig implementiert und täglich im Rahmen von Serviceaufgaben eingesetzt. Es wurden insgesamt mehrere hundert Kilometer zurückgelegt, wobei stopfreie Fahrten von über einem Kilometer Länge keine Seltenheit waren. Durch frühzeitige experimentelle Ergebnisse wurden die im Alltagsbetrieb auftretenden hohen Anforderungen klar und konnten bei der Auslegung des Systems berücksichtigt werden. Die erreichten Genauigkeiten liegen bei etwa ± 2 cm, $\pm 0.5^{\circ}$ für die Lokalisierung mit Hilfe des Lasernavigationssystems und bei etwa ± 10 cm, $\pm 2^{\circ}$ für das Multisonarsystem.

Diese Arbeit kann zum einen als „Rezept“ zum Entwurf zuverlässiger Lokalisierungsverfahren für mobile Roboter dienen. Zum anderen sind die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Lösungen zu Problemen der Sensordatenverarbeitung und der Zustandsschätzung weit allgemeinerer Natur und können in den verschiedensten Bereichen nutzbringend eingesetzt werden. Beispielsweise ist das Verfahren zur winkelbasierten Lokalisierung für die Auswertung beliebiger winkelgebender Sensoren geeignet. Auch der neue Ansatz zur Auswertung von Distanzsensoren ist in der Anwendung nicht auf mobile Roboter beschränkt, sondern könnte beispielsweise auch bei bildgebenden akustischen Verfahren in der Medizin, bei der Auswertung von seismischen Signalen und in der Radarmeßtechnik Verwendung finden.

Zur Zustandsschätzung konnten im Anwendungsfall mengenbasierte Verfahren vorteilhaft eingesetzt werden, da unkorrelierte stochastische Störungen klein gegenüber korrelierten oder systematischen Unsicherheiten waren. Sind die stochastischen Fehler dominant, so sind selbstverständlich stochastische Filter, beispielsweise KALMAN–Filter, besser zur Zustandschätzung geeignet. Treten sowohl stochastische als auch systematische Fehler auf, so kann die Verwendung eines neuen Filtertyps, des sogenannten SSI–Filters (Statistical and Set–theoretic Information Filter), angebracht sein. Dieses neue Filter verallgemeinert die mengenbasierten und statistischen Methoden, wobei diese als Grenzfälle erreicht werden: Wenn der stochastische Fehler verschwindet, so konvergiert das SSI–Filter gegen einen rein mengentheoretischen Schätzer; verschwindet der deterministische Fehler, so ergibt sich ein rein stochastischer Schätzer. Sind beide Formen von Unsicherheiten vorhanden, so ergibt sich als Schätzung eine Lösungsmenge, deren Begrenzungen im statistischen Sinne unsicher sind. Im Anhang C werden erste Ergebnisse [116] für den Fall eines skalaren statischen Zustands vorgestellt. Eine Verallgemeinerung des SSI–Filters auf dynamische Systeme beliebiger Dimension ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten.

Anhang A

Ergänzungen zur effizienten Auswertung von Sensordaten

A.1 Berechnung des Landmarkenabstands mit Gleichung (4.14)

Die quadratische Gleichung (4.14) weist aus physikalischen Gründen nur reelle Wurzeln auf. Dabei können entweder eine negative und eine positive Wurzel oder zwei positive Wurzeln auftreten. Im ersten Fall ergibt die positive Wurzel einen Schätzwert $\hat{r}^O$ für den Landmarkenabstand. Im zweiten Fall kann entweder Vorinformation über die Landmarkenlage zur Auswahl herangezogen werden, oder es wird diejenige Wurzel gewählt, welche bei Einsetzen in

$$\left\| \underline{\hat{\delta}} + 2r^O \underline{\hat{R}} - \mathbf{H} \left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)} + 2r^O \underline{\hat{\beta}}^{(I)} \right) \right\|$$

den kleinsten Wert ergibt. Diesen Ausdruck erhält man durch Verwendung der formalen Kleinste–Quadrate–Lösung (4.11) in (4.10). Falls die Lösung eindeutig ist, wird von dem vorgestellten Verfahren also auch nur eine Lösung geliefert.

Über die Lage der Wurzeln kann vorab eine Aussage getroffen werden. Durch Abwandlung des Hurwitz–Kriteriums folgt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß beide Wurzeln eines Polynom zweiten Grades gemäß

$$ax^2 + bx + c$$

in der rechten Halbebene liegen, als

$$a > 0\,,\ b < 0\,,\ c > 0\ .$$

Wegen

$$\left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)} \right)^T \underline{\hat{\beta}}^{(I)} < 0\,,\ \left(\underline{\hat{\alpha}}^{(I)} \right)^T \underline{\hat{\alpha}}^{(I)} > 0$$

muß also

$$\left\| \underline{\hat{\beta}}^{(I)} \right\| > 0.5$$

gelten, damit (4.14) zwei positive Wurzeln aufweist.

A.2 Jacobi–Matrizen zur Perturbationsanalyse der Lagebestimmung mit Winkelmeßsystemen

Die Jacobi–Matrizen $\mathbf{J}_{\underline{e}}^{\underline{x}^{\mathrm{LM}}}$ und $\mathbf{J}_{\underline{e}}^{\underline{\alpha}}$ in (4.6) sind gegeben als

$$\mathbf{J}_{\underline{e}}^{\underline{x}^{\mathrm{LM}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial x_1^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_1}{\partial y_1^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_1}{\partial x_2^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_1}{\partial y_2^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_1}{\partial x_3^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_1}{\partial y_3^{\mathrm{LM}}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial e_2}{\partial x_2^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_2}{\partial y_2^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_2}{\partial x_3^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_2}{\partial y_3^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_2}{\partial x_4^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_2}{\partial y_4^{\mathrm{LM}}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial e_3}{\partial x_3^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_3}{\partial y_3^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_3}{\partial x_4^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_3}{\partial y_4^{\mathrm{LM}}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & \\ \frac{\partial e_{N-1}}{\partial x_1^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial y_1^{\mathrm{LM}}} & 0 & 0 & \dots & & & & & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial x_N^{\mathrm{LM}}} & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial y_N^{\mathrm{LM}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\underline{e}}^{\underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1} - \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} & \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} & \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} - \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_4} & \frac{\partial e_1}{\partial \gamma_5} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ \frac{\partial e_{N-1}}{\partial \gamma_N} & 0 & 0 & \dots & & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial \gamma_{N-1}} & \frac{\partial e_{N-1}}{\partial \gamma_{N-1}} - \frac{\partial e_{N-1}}{\partial \gamma_N} \end{bmatrix},$$

mit den Elementen

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial x_i^{\mathrm{LM}}} &= \left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{x}^S\right\} \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad - \left\{y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{y}^S\right\} \cos(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial y_i^{\mathrm{LM}}} &= \left\{y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{y}^S\right\} \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad + \left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{x}^S\right\} \cos(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial x_{i+1}^{\mathrm{LM}}} &= \left\{x_i^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right\} \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad + \left\{y_i^{\mathrm{LM}} - \tilde{y}^S\right\} \cos(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad + \left\{y_{i+2}^{\mathrm{LM}} - \tilde{y}^S\right\} \sin(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial y_{i+1}^{\mathrm{LM}}} &= \left\{y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right\} \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad - \left\{x_i^{\mathrm{LM}} - \tilde{x}^S\right\} \cos(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad - \left\{x_{i+2}^{\mathrm{LM}} - \tilde{x}^S\right\} \sin(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial x_{i+2}^{\mathrm{LM}}} &= -\left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{x}^S\right\} \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad - \left\{y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{y}^S\right\} \sin(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial y_{i+2}^{\mathrm{LM}}} &= -\left\{y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{y}^S\right\} \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad + \left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{x}^S\right\} \sin(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial \gamma_i} &= -\left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}} x_i^{\mathrm{LM}} + \tilde{x}^S\left(y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - y_i^{\mathrm{LM}}\right) + \tilde{y}^S\left(x_i^{\mathrm{LM}} - x_{i+1}^{\mathrm{LM}}\right)\right\} \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad + \left\{\left(x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{x}^S\right)\left(x_i^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right) + \left(y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{y}^S\right)\left(y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right)\right\} \cos(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \\ &\quad - \left\{x_{i+2}^{\mathrm{LM}} y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - y_{i+2}^{\mathrm{LM}} x_{i+1}^{\mathrm{LM}} + \tilde{x}^S\left(y_{i+2}^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}}\right) + \tilde{y}^S\left(x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right)\right\} \cos(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial \gamma_{i+1}} &= \left\{x_{i+1}^{\mathrm{LM}} y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}} x_i^{\mathrm{LM}} + \tilde{x}^S\left(y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - y_i^{\mathrm{LM}}\right) + \tilde{y}^S\left(x_i^{\mathrm{LM}} - x_{i+1}^{\mathrm{LM}}\right)\right\} \cos(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1}) \\ &\quad + \left\{\left(x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{x}^S\right)\left(x_i^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right) + \left(y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - \tilde{y}^S\right)\left(y_i^{\mathrm{LM}} - y_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right)\right\} \sin(\gamma_i)\cos(\gamma_{i+1}) \\ &\quad + \left\{x_{i+2}^{\mathrm{LM}} y_{i+1}^{\mathrm{LM}} - y_{i+2}^{\mathrm{LM}} x_{i+1}^{\mathrm{LM}} + \tilde{x}^S\left(y_{i+2}^{\mathrm{LM}} - y_{i+1}^{\mathrm{LM}}\right) + \tilde{y}^S\left(x_{i+1}^{\mathrm{LM}} - x_{i+2}^{\mathrm{LM}}\right)\right\} \sin(\gamma_i)\sin(\gamma_{i+1}) \end{aligned}$$

Anhang B

Mengenbasierte Zustandsschätzung

B.1 Beschreibung von Ellipsoiden

Eine ellipsoidale Menge $\mathcal{A}$ wird durch ihren Mittelpunkt $\underline{\hat{a}}$ und eine positiv definite Matrix $\mathbf{A}$ beschrieben. Es gilt damit

$$\mathcal{A} = \left\{ \underline{x} : (\underline{x} - \underline{\hat{a}})^T \mathbf{A}^{-1} (\underline{x} - \underline{\hat{a}}) \leq 1 \right\} \ .$$

Im $\mathbb{R}^N$ werden also $N + \frac{N(N+1)}{2}$ Parameter benötigt, wobei offensichtlich N Parameter auf den Mittelpunkt und $\frac{N(N+1)}{2}$ Parameter auf die Definitionsmatrix entfallen.

B.2 Affine Transformation eines Ellipsoids

Eine affine Transformation vom $\mathbb{R}^N$ auf den $\mathbb{R}^M$ sei gegeben als

$$\underline{y} = \mathbf{T}\underline{x} + \underline{t} \ ,$$

mit $\mathbf{T} \in \mathcal{M}_{M,N}$, $\underline{t} \in \mathcal{M}_{M,1}$. Gilt $\underline{x} \in \mathcal{A}$, so folgt $\underline{y} \in \mathcal{B}$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ \underline{y} : \left(\underline{y} - \underline{\hat{b}} \right)^T \mathbf{B}^{-1} \left(\underline{y} - \underline{\hat{b}} \right) \leq 1 \right\} \\ \underline{\hat{b}} &= \mathbf{T}\underline{\hat{a}} + \underline{t} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^T \ . \end{aligned}$$

B.3 Volumen eines Ellipsoids

Das Volumen eines Ellipsoids $\mathcal{A}$ im $\mathbb{R}^N$ ist durch

$$V = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{E\left(\frac{N}{2} + 1\right)} \sqrt{\det(\mathbf{A})} \tag{B.1}$$

gegeben und damit proportional zu $\sqrt{\det(\mathbf{A})}$. $E(.)$ stellt die Eulersche Zahl [104] dar.

B.4 Transformation eines Ellipsoidenpaars

In diesem Abschnitt werden die Hauptachsen zweier Ellipsoide durch eine gemeinsame Transformation mit den Achsen des Koordinatensystems ausgerichtet.

Gegeben seien zwei Ellipsoide $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ im $\mathbb{R}^N$, wobei diese gemäß Abschnitt B.1 durch ihren Mittelpunkt und eine Definitionsmatrix beschrieben sind. Der Wunsch nach der besagten Transformation führt auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem, wobei im Einzelfall zu entscheiden ist, ob die Verwendung der Definitionsmatrizen oder ihrer Inversen numerisch günstiger ist.

Fall 1: *Verwendung der Definitionsmatrizen* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Aus

$$\det(\mathbf{B} - \mu\mathbf{A}) = 0$$

ergibt sich ein Polynom N–ten Grades, dessen Nullstellen die N positiv reellen verallgemeinerten Eigenwerte μ_i, $i = 1, \ldots, N$ des Matrizenpaars $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ darstellen. Die N Eigenvektoren $\underline{e}_i$, $i = 1, \ldots, N$ ergeben sich dann aus

$$(\mathbf{B} - \mu_i\mathbf{A})\underline{e}_i = 0\,,\ i = 1, \ldots, N\ ,$$

wodurch eine Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_N]$$

angegeben werden kann. Normiert man diese Transformationsmatrix gemäß

$$\mathbf{T}^T\mathbf{B}\mathbf{T} = \mathbf{I}\ ,$$

d.h. führt man eine Normalisierung durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* &= \mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathrm{diag}\,(\mu_1, \ldots, \mu_N)\\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{T}^T\mathbf{B}\mathbf{T} = \mathbf{I}\ .\end{aligned}$$

Für die transformierten Mittelpunkte gilt

$$\begin{aligned}\underline{\hat{a}}^* &= \mathbf{T}^T\underline{\hat{a}}\\ \underline{\hat{b}}^* &= \mathbf{T}^T\underline{\hat{b}}\ .\end{aligned}$$

Fall 2: *Verwendung der Inversen der Definitionsmatrizen* $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$. Aus

$$\det(\mathbf{B}^{-1} - \mu\mathbf{A}^{-1}) = 0$$

ergeben sich wieder N positiv reelle verallgemeinerte Eigenwerte μ_i, $i = 1, \ldots, N$ des Matrizenpaars $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$. Mit

$$(\mathbf{B}^{-1} - \mu_i\mathbf{A}^{-1})\underline{e}_i = 0\,,\ i = 1, \ldots, N\ .$$

erhält man N Eigenvektoren $\underline{e}_i$, $i = 1, \ldots, N$, die wieder zu einer Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_N]$$

angeordnet werden. Nach der Normalisierung von $\mathbf{T}$ gemäß

$$\mathbf{T}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}\ ,$$

ergibt sich

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{*} = \mathbf{T}^{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T} = \mathrm{diag}\left(\mu_1, \ldots, \mu_N\right)$$
$$\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{*} = \mathbf{T}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I} \ .$$

Für die transformierten Mittelpunkte erhält man

$$\underline{\hat{a}}^{*} = \mathbf{T}^{-1}\underline{\hat{a}}$$
$$\underline{\hat{b}}^{*} = \mathbf{T}^{-1}\underline{\hat{b}} \ .$$

Zu diesen Ausführungen ist zu bemerken, daß hier lediglich das Konzept der Transformation geschildert wurde. In einer Implementierung sind gegebenenfalls numerisch günstigere Verfahren zu wählen, die zum Beispiel in [105] zu finden sind.

B.5 Minkowski–Summe zweier Ellipsoide

Die Minkowski–Summe zweier Ellipsoide $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\mathcal{A} = \{\underline{a} : (\underline{a} - \underline{\hat{a}})^{T}\mathbf{A}^{-1}(\underline{a} - \underline{\hat{a}}) \leq 1\}$$
$$\mathcal{B} = \{\underline{b} : (\underline{b} - \underline{\hat{b}})^{T}\mathbf{B}^{-1}(\underline{b} - \underline{\hat{b}}) \leq 1\} \ ,$$

kann durch ein äußeres Hüllellipsoid der Form

$$\mathcal{C} = \{\underline{c} : (\underline{c} - \underline{\hat{c}})^{T}\mathbf{C}^{-1}(\underline{c} - \underline{\hat{c}}) \leq 1\}$$

mit

$$\underline{\hat{c}} = \underline{\hat{a}} + \underline{\hat{b}}, \ \mathbf{C} = \frac{1}{0.5 - \kappa}\mathbf{A} + \frac{1}{0.5 + \kappa}\mathbf{B}$$

approximiert werden [100]. Das Hüllellipsoid mit minimalem Volumen ergibt sich mit κ als die einzige Nullstelle von

$$\left(\underline{P}^{(N)}\right)^{T} \cdot \left[\kappa^{N+1}, \kappa^{N}, \ldots, \kappa, 1\right]^{T} = 0$$

in $[-0.5, 0.5]$. Den Koeffizientenvektor erhält man rekursiv aus

$$\left(\underline{P}^{(i)}\right)^{T} = \begin{bmatrix} 2\left(1 - \underline{\mu}(i)\right) \\ \left(1 + \underline{\mu}(i)\right) \\ 4\left(1 - \underline{\mu}(i)\right) \\ 4\left(1 + \underline{\mu}(i)\right) \\ \left(1 - \underline{\mu}(i)\right) \end{bmatrix}^{T} \left[\mathrm{shift}_1\left(\underline{P}^{(i-1)}\right) \ , \ \mathrm{shift}_2\left(\underline{Q}^{(i-1)}\right)\right]^{T}$$

und

$$\left(\underline{Q}^{(i)}\right)^{T} = \begin{bmatrix} 2\left(1 - \underline{\mu}(i)\right) \\ \left(1 + \underline{\mu}(i)\right) \end{bmatrix}^{T} \left[\mathrm{shift}_2\left(\underline{Q}^{(i-1)}\right)\right]^{T}$$

für $i = 1, \ldots, N$ mit den Anfangswerten $\underline{P}^{(0)} = 0$, $\underline{Q}^{(0)} = 1$.
BEWEIS. Zunächst transformieren wir $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mit den Techniken aus Anhang B.4 gemeinsam auf Diagonalform, d.h.,

$$\mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{I}\,,\ \mathbf{T}^T\mathbf{B}\mathbf{T} = \mathrm{diag}(\underline{\mu})\ .$$

Damit gilt

$$\mathbf{C} = \frac{1}{0.5-\kappa}\mathbf{I} + \frac{1}{0.5+\kappa}\mathrm{diag}(\underline{\mu})\ .$$

Das Volumen des Hüllellipsoids ist proportional zu $\sqrt{\det(\mathbf{C})}$. Quadrieren, logarithmieren und differenzieren nach κ ergibt

$$\frac{\partial \ln\{\det(\mathbf{C})\}}{\partial\kappa} = \mathrm{spur}\left\{\mathbf{C}^{-1}\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\kappa}\right\} = 0\ .$$

Hieraus folgt

$$(0.5-\kappa)^2\sum_{i=1}^{N}\frac{\underline{\mu}(i)}{0.5+\kappa+(0.5-\kappa)\underline{\mu}(i)} = (0.5+\kappa)^2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{0.5+\kappa+(0.5-\kappa)\underline{\mu}(i)}\ ,$$

und durch Umformung

$$\begin{aligned}&(1-2\kappa)^2\sum_{i=1}^{N}\underline{\mu}(i)\prod_{j=1,j\neq i}^{N}\{1+\underline{\mu}(j)+2\kappa(1-\underline{\mu}(j))\}\\ &-(1+2\kappa)^2\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1,j\neq i}^{N}\{1+\underline{\mu}(j)+2\kappa(1-\underline{\mu}(j))\}=0\ .\end{aligned}$$

Die Rekursion folgt dann aus

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left\{4\left(1-\underline{\mu}(i)\right)\kappa^2+4\left(1+\underline{\mu}(i)\right)\kappa+1-\underline{\mu}(i)\right\}\prod_{j=1,j\neq i}^{N}\left\{1+\underline{\mu}(j)+2\kappa\left(1-\underline{\mu}(j)\right)\right\}\\ &=\left\{\sum_{i=1}^{N-1}\left\{4\left(1-\underline{\mu}(i)\right)\kappa^2+4\left(1+\underline{\mu}(i)\right)\kappa+1-\underline{\mu}(i)\right\}\prod_{j=1,j\neq i}^{N-1}\left\{1+\underline{\mu}(j)+2\kappa(1-\underline{\mu}(j))\right\}\right\}\\ &\quad\left\{1+\underline{\mu}(N)+2\kappa\left(1-\underline{\mu}(N)\right)\right\}\\ &+\left\{4\left(1-\underline{\mu}(N)\right)\kappa^2+4\left(1+\underline{\mu}(N)\right)\kappa+1-\underline{\mu}(N)\right\}\prod_{j=1}^{N-1}\left\{1+\underline{\mu}(j)+2\kappa\left(1-\underline{\mu}(j)\right)\right\}\ .\end{aligned}$$

□

B.5.1 Spezialfall: Addition von skalaren Größen

Für zwei skalare Größen

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{a : |a-\hat{a}| \le \sqrt{A}\}\\ \mathcal{B} &= \{b : |b-\hat{b}| \le \sqrt{B}\}\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{c : |c-\hat{c}| \le \sqrt{C}\}\\ \hat{c} &= \hat{a}+\hat{b}\\ C &= \left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)^2\ .\end{aligned}$$

B.6 Zusammenfassung von Zuständen

Gegeben seien ein N–dimensionales Ellipsoid $\mathcal{A}$ mit

$$\mathcal{A} = \left\{ \underline{a} : (\underline{a} - \hat{\underline{a}})^T \, \mathbf{A}^{-1} \, (\underline{a} - \hat{\underline{a}}) \leq 1 \right\}$$

und ein M–dimensionales Ellipsoid $\mathcal{B}$ mit

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{b} : \left(\underline{b} - \hat{\underline{b}}\right)^T \mathbf{B}^{-1} \left(\underline{b} - \hat{\underline{b}}\right) \leq 1 \right\} \quad .$$

Gesucht ist nun ein $(N + M)$–dimensionales Ellipsoid $\mathcal{C}$, für das gilt $\left[\underline{a}^T, \underline{b}^T\right]^T \in \mathcal{C}$, mit $\underline{a} \in \mathcal{A}$, $\underline{b} \in \mathcal{B}$.

Satz B.1 *Eine Familie von Ellipsoiden mit den gesuchten Eigenschaften ist gegeben durch*

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{c} : (\underline{c} - \hat{\underline{c}})^T \, \mathbf{C}^{-1} \, (\underline{c} - \hat{\underline{c}}) \leq 1 \right\} \quad ,$$

mit

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{a}} \\ \hat{\underline{b}} \end{bmatrix} \; , \; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{A}}{0.5-\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{B}}{0.5+\lambda} \end{bmatrix} \quad ,$$

wobei minimales Volumen für

$$\lambda_{min} = 0.5 \frac{M - N}{M + N}$$

erreicht wird.

Beweis. Interpretiert man die Zustandserweiterung als Minkowski–Summe, d.h.

$$\begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{b} \end{bmatrix} \quad ,$$

so ergibt sich mit Abschnitt B.5

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{a}} \\ \hat{\underline{b}} \end{bmatrix} \; , \; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{A}}{0.5-\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{B}}{0.5+\lambda} \end{bmatrix} \quad .$$

Das Volumen von $\mathcal{C}$ ist wegen (B.1) proportional zu

$$\det(\mathbf{C}) = \left(\frac{1}{0.5 - \lambda}\right)^N \det(\mathbf{A}) \left(\frac{1}{0.5 + \lambda}\right)^M \det(\mathbf{B}) \quad .$$

Differenzieren und zu Null setzen ergibt

$$\frac{\partial \det(\mathbf{C})}{\partial \lambda} = \frac{(N + M)\lambda + 0.5(N - M)}{(0.5 - \lambda)^{N+1}(0.5 + \lambda)^{M+1}} \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = 0$$

Wegen $\left.\frac{\partial^2 \det(\mathbf{C})}{\partial \lambda^2}\right|_{[\lambda_{\min}]} > 0$ handelt es sich bei $\lambda_{\min}$ um das λ für minimales Volumen. □

B.7 Ergänzungen zur statischen Zustandsschätzung

B.7.1 Beweis von Satz 2.5

Wegen (2.5) gilt

$$(\underline{z} - \mathbf{H}\underline{x})^T \mathbf{E}^{-1} (\underline{z} - \mathbf{H}\underline{x}) \leq 1 \ . \tag{B.2}$$

Gesucht ist die ellipsoidale Menge aller $\underline{x}$, für die diese Ungleichung erfüllt ist. Für den Mittelpunkt $\hat{\underline{x}}$ muß die linke Seite minimal werden. Durch Differentiation nach $\underline{x}$ und Nullsetzen des Resultats ergibt sich

$$\mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H} \hat{\underline{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \underline{z} \ . \tag{B.3}$$

Es handelt sich um ein Minimum, da die nochmalige Differentiation zu $\mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H}$ (positiv definit) führt.

Im folgenden werden die restlichen Parameter des Ellipsoids bestimmt. Zunächst wird $\mathbf{H}\hat{\underline{x}}$ auf beiden Seiten von (2.4) subtrahiert. Damit folgt

$$\underline{z} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}} = \mathbf{H}(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) + \underline{e} \ .$$

Einsetzen in (B.2) führt auf

$$\{\underline{z} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}} - \mathbf{H}(\underline{x} - \hat{\underline{x}})\}^T \mathbf{E}^{-1} \{\underline{z} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}} - \mathbf{H}(\underline{x} - \hat{\underline{x}})\} \leq 1 \ .$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$(\underline{z} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}})^T \mathbf{E}^{-1} (\underline{z} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}}) - 2(\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \underbrace{\mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} (\underline{z} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}})}_{0 \text{ wegen } (B.3)} + (\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H} (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) \leq 1 \ ,$$

woraus

$$(\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H} (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) \leq 1 - (\underline{z} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}})^T \mathbf{E}^{-1} (\underline{z} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}}) = d$$

folgt.

B.7.2 Beweis von Satz 2.6

Durch Umformung von d in Satz 2.5 ergibt sich

$$d = 1 - \underline{z}^T \left\{ \mathbf{E}^{-1} - \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H} \left(\mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \right\} \underline{z}$$

und damit

$$d = 1 - \underline{e}^T \mathbf{E}^{-1} \underline{e} + \underline{e}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \underline{e} \ ,$$

woraus folgt

$$\underline{e}^T \mathbf{E}^{-1} \underline{e} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad d \geq 0 \ .$$

Anhang C

Das SSI–Filter

In dieser Arbeit konnten bei der Zustandsschätzung gute Ergebnisse mit rein mengenbasierten Verfahren erzielt werden. Der Grund hierfür ist, daß in der betrachteten Applikation stochastische Fehler eine begrenzte Amplitude aufweisen und außerdem klein gegenüber den systematischen Unsicherheiten sind. Sind auf der anderen Seite systematische Fehler vernachlässigbar gegenüber stochastischen Unsicherheiten, so stellen stochastische Fusionsverfahren das geeignetere Werkzeug dar.

In vielen Applikationen sind nun beide Formen von Unsicherheiten nicht vernachlässigbar. In der Literatur finden sich deshalb verschiedene Ansätze zur Berücksichtigung von unbekannten systematischen Fehlern in stochastischen Systemmodellen. Mehrere Autoren verwenden zusätzliche Zustandsgrößen (state augmentation), [71] benutzt eine Bank von KALMAN–Filtern. In [76] wird die Zustandserweiterung kritisiert und ein neuer Ansatz unter der Annahme der Unkenntnis (ignorance) vorgestellt. Die getrennte Schätzung von Zustand und systematischen Fehlern wird in [74] diskutiert.

Hier wird ein neues Verfahren zur Zustandsschätzung vorgestellt, welches Messungen aus mehreren Informationsquellen verarbeitet, die gleichzeitig mit zwei verschiedenartigen Fehlern behaftet sind. Bei dem einen Fehlertyp handelt es sich um einen deterministischen Fehler mit bekannter Amplitudenbegrenzung. Der andere Fehlertyp ist ein stochastischer Fehler mit bekannter Statistik. A priori Wissen über beide Formen der Unsicherheit erlaubt konzeptionell unterschiedliche Reduktionen beider Unsicherheiten des gesuchten Zustands auf der Basis der Messungen. Das sogenannte SSI–Filter (Statistical and Set–theoretic Information Filter) enthält die klassischen Schätzmethoden als Grenzfälle: Es konvergiert gegen einen rein mengentheoretischen Schätzer, wenn der stochastische Fehler verschwindet, und gegen einen rein stochastischen Schätzer, wenn der deterministische Fehler verschwindet. Sind beide Fehler vorhanden, so handelt es sich bei der resultierenden Schätzung um eine Lösungsmenge, deren Begrenzung im statistischen Sinne unsicher ist. Diese Lösungsmenge konvergiert für eine *unendliche* Anzahl von Messungen pro Informationsquelle gegen die Schnittmenge der zugrundeliegenden unverrauschten Mengen.

In Abschnitt C.1 erfolgt zunächst eine Formulierung des betrachteten Problems. Der Spezialfall zweier Informationsquellen wird in Abschnitt C.2 diskutiert. Ein rekursives SSI–Filter für eine beliebige Anzahl von Informationsquellen wird in Abschnitt C.3 eingeführt. Simulative Beispiele zur Lokalisation mobiler Roboter werden in Abschnitt C.4 behandelt. Die Untersuchungen sind auf den Fall eines skalaren, statischen Zustands beschränkt, Hinweise für die Verallgemeinerung auf den Fall eines statischen Zustandsvektors beliebiger Dimension finden sich in Abschnitt C.5.

C.1 Problemformulierung

Gegeben seien N Informationsquellen S_i, $i = 1, \ldots, N$, für einen gesuchten Zustand x. Jede Quelle S_i sei mit zwei additiven Fehlern verschiedenen Typs behaftet. Der erste Fehler sei deterministisch, also konstant aber unbekannt. Die Amplitude des Fehlers sei durch eine Menge begrenzt, im skalaren Fall also durch ein Intervall. Der zweite Fehler wird durch einen

diskreten, mittelwertfreien, im allgemeinen farbigen stochastischen Prozeß SP_i mit bekannter Statistik beschrieben. Die stochastischen Prozesse verschiedener Quellen seien voneinander unabhängig. Damit lautet die Meßgleichung für den skalaren Fall[9)]

$$Z_i^k = x + {}^ie_d + {}^iE_s^k,\ {}^ie_d \in \left[-\frac{b_i}{2},\ \frac{b_i}{2}\right],\ {}^iE_s^k \sim \mathrm{SP}_i\ . \tag{C.1}$$

Wenn der Einfluß des stochastischen Fehlers ${}^iE_s^k$ vernachlässigbar ist, erfolgt die Schätzung des Zustands x bei gegebenen Messungen Z_i^k durch Schnittmengenbildung, die zu einer Intervallschätzung führt. Der Einfluß der statistischen Unsicherheit kann durch die Filterung einer Vielzahl von Messungen für jede Quelle S_i eliminiert werden, so daß anschließend die Schnittmengenbildung durchgeführt werden kann. Hier soll jedoch eine Schätzung des Zustands x zu jedem Zeitpunkt t_k zur Verfügung gestellt werden. Natürlich handelt es sich dabei nicht um eine Punktschätzung, sondern um eine Intervallschätzung, wobei die Grenzen im statistischen Sinne unsicher sind. Diese Schätzung soll für eine Vielzahl von Messungen pro Informationsquelle gegen das oben erwähnte unverrauschte Schnittintervall konvergieren.

C.2 Zwei Informationsquellen

Zunächst sei der Spezialfall zweier unabhängiger Informationsquellen S_i, $i = 1, 2$, betrachtet. Die Intervallgrenzen $\pm\frac{b_i}{2}$ des deterministischen, konstanten Fehlers und die Dichten f_i^k des stochastischen Fehlers zum Zeitpunkt t_k seien für jede Quelle a priori bekannt. Im folgenden wird die Herleitung der Verbunddichte von linker und rechter Grenze des Intervallschätzers skizziert. Für den Sonderfall von Gaußdichten f_i^k werden analytische Ausdrücke für die Randdichten und die Erwartungswerte angegeben.

C.2.1 Stochastische Fehler beliebiger Dichte

$\hat{X}_i^k$ sei der Schätzer für $x + {}^ie_d$ mit der Dichte $\hat{f}_i^k$ zum Zeitpunkt t_k. Die Verbundverteilungsdichte der beiden unabhängigen Zufallsvariablen $\hat{X}_i^k$, $i = 1, 2$, lautet $\hat{f}_{12}^k = \hat{f}_1^k \hat{f}_2^k$. Aufgrund des a priori Wissens über den deterministischen Fehler, ${}^ie_d \in \left[-\frac{b_i}{2},\ \frac{b_i}{2}\right]$, wird nun die Dichte für $\left|\hat{x}_2^k - \hat{x}_1^k\right| > \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ zu Null gesetzt. Damit ergibt sich die Dichte

$$\hat{\hat{f}}_{12}^k = \begin{cases} C\,\hat{f}_{12}^k & \text{für } \left|\hat{x}_2^k - \hat{x}_1^k\right| \le \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei C einen Normierungsfaktor darstellt. Die linke und rechte Grenze ${}^2L^k$ und ${}^2R^k$ des Intervallschätzers zum Zeitpunkt t_k bei Berücksichtigung zweier Informationsquellen werden nun als

$${}^2L^k = \max\left(\hat{\hat{X}}_1^k - \frac{b_1}{2},\ \hat{\hat{X}}_2^k - \frac{b_2}{2},\ \right)\ , \tag{C.2}$$

$${}^2R^k = \min\left(\hat{\hat{X}}_1^k + \frac{b_1}{2},\ \hat{\hat{X}}_2^k + \frac{b_2}{2},\ \right) \tag{C.3}$$

[9)] Großbuchstaben werden für Zufallsvariable und Zufallsprozesse verwendet, Kleinbuchstaben für konkrete Realisierungen und deterministische Größen.

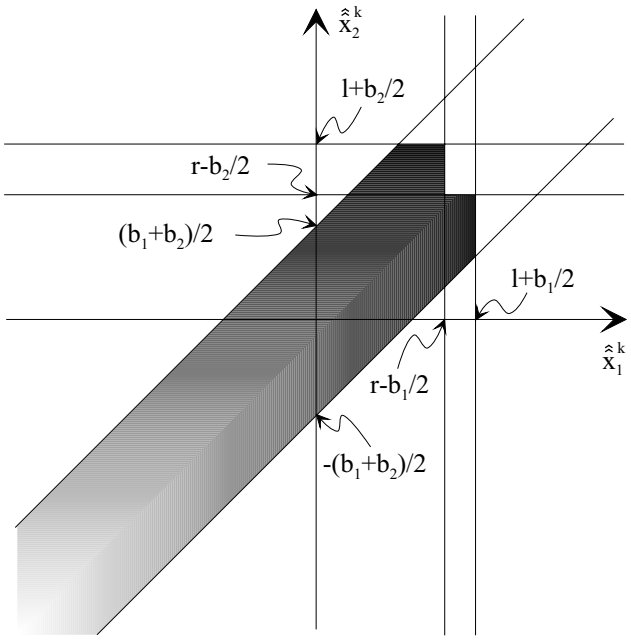


Abbildung C.1: Graphische Darstellung zur Herleitung der Verbundverteilung ${}^2F_{LR}^k(l,r)$.

definiert, wobei die Verbundverteilungsdichte von $\hat{\hat{X}}_1^k$ und $\hat{\hat{X}}_2^k$ durch $\hat{\hat{f}}_{12}^k$ gegeben ist. Die Verbundverteilungsdichte für die linke und rechte Grenze des stochastischen Intervallschätzers kann dann mit Hilfe von Abb. C.1 zu

$$
{}^2f_{LR}^k(l,r) = \begin{cases} {}^2C_{LR}^k \left[\hat{f}_1^k\left(r-\frac{b_1}{2}\right)\hat{f}_2^k\left(l+\frac{b_2}{2}\right) + \hat{f}_1^k\left(l+\frac{b_1}{2}\right)\hat{f}_2^k\left(r-\frac{b_2}{2}\right) \right. \\ \qquad \left. + \delta(l+b_1-r)\,\hat{f}_1^k\left(l+\frac{b_1}{2}\right) \int\limits_{x=l+b_1-\frac{b_2}{2}}^{l+\frac{b_2}{2}} \hat{f}_2^k(x)\,dx \right] & \text{für } l \le r \le l+b_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{C.4}
$$

berechnet werden, wobei o.B.d.A. $b_1 < b_2$ vorausgesetzt wird. $\delta(x)$ bezeichnet den Dirac–Impuls und ${}^2C_{LR}^k$ einen Normierungsfaktor, der

$$
\int\limits_{l=-\infty}^{\infty} \int\limits_{r=-\infty}^{\infty} {}^2f_{LR}^k(l,r)\; dr\, dl \;=\; 1
$$

gewährleistet.

C.2.2 Gaußverteilte stochastische Fehler

Handelt es sich bei f_i^k, $i=1,2$, um Gaußdichten, so gilt dies auch für $\hat{f}_i^k$, $i=1,2$. Mit

$$
\hat{f}_i^k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_i^k} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\hat{m}_i^k}{\hat{\sigma}_i^k}\right)^2\right)
$$

können nun analytische Ausdrücke für den Normierungsfaktor, die Randdichten und die Erwartungswerte von linker und rechter Grenze, ${}^2L^k$ und ${}^2R^k$, hergeleitet werden. Der

Normierungsfaktor lautet

$$
\begin{aligned}
{}^2C_{LR}^k \;=\; & \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{m}_1^k - \hat{m}_2^k + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{m}_1^k - \hat{m}_2^k - \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right) \\
& + \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{m}_2^k - \hat{m}_1^k + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{m}_2^k - \hat{m}_1^k + \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right) \quad , \qquad \text{(C.5)}
\end{aligned}
$$

wobei die erf–Funktion als

$$
\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=0}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy
$$

definiert ist [106].

Die Randdichte ${}^2f_L^k(l) = \int_{r=-\infty}^{\infty} f_{LR}^k(l,r)\, dr$ der linken Grenze berechnet sich zu

$$
\begin{aligned}
{}^2f_L^k(l) \;=\; & \frac{1}{{}^2C_{LR}^k}\left[\hat{f}_1^k\left(l + \frac{b_1}{2}\right)\left(\operatorname{erf}\left(\frac{l + \frac{b_2}{2} - \hat{m}_2^k}{\hat{\sigma}_2^k}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{l - \frac{b_2}{2} - \hat{m}_2^k}{\hat{\sigma}_2^k}\right)\right)\right. \\
& \left. + \hat{f}_2^k\left(l + \frac{b_2}{2}\right)\left(\operatorname{erf}\left(\frac{l + \frac{b_1}{2} - \hat{m}_1^k}{\hat{\sigma}_1^k}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{l - \frac{b_1}{2} - \hat{m}_1^k}{\hat{\sigma}_1^k}\right)\right)\right] . \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

Die Randdichte der rechten Grenze ${}^2f_R^k(r) = \int_{l=-\infty}^{\infty} f_{LR}^k(l,r)\, dl$ erhält man zu

$$
\begin{aligned}
{}^2f_R^k(r) \;=\; & \frac{1}{{}^2C_{LR}^k}\left[\hat{f}_1^k\left(r - \frac{b_1}{2}\right)\left(\operatorname{erf}\left(\frac{r + \frac{b_2}{2} - \hat{m}_2^k}{\hat{\sigma}_2^k}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{r - \frac{b_2}{2} - \hat{m}_2^k}{\hat{\sigma}_2^k}\right)\right)\right. \\
& \left. + \hat{f}_2^k\left(r - \frac{b_2}{2}\right)\left(\operatorname{erf}\left(\frac{r + \frac{b_1}{2} - \hat{m}_1^k}{\hat{\sigma}_1^k}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{r - \frac{b_1}{2} - \hat{m}_1^k}{\hat{\sigma}_1^k}\right)\right)\right] . \qquad \text{(C.7)}
\end{aligned}
$$

Der Erwartungswert der linken Grenze lautet

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left\{{}^2L^k\right\} = \\
& \frac{1}{{}^2C_{LR}^k}\left(\left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2\left[\mathcal{G}\left(\hat{m}_2^k - \hat{m}_1^k + \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}\right) - \mathcal{G}\left(\hat{m}_2^k - \hat{m}_1^k - \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}\right)\right]\right. \\
& + \left(\hat{m}_2^k - \frac{b_2}{2}\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\hat{m}_2^k - \hat{m}_1^k + \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{m}_2^k - \hat{m}_1^k - \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right)\right] \\
& + \left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2\left[\mathcal{G}\left(\hat{m}_1^k - \hat{m}_2^k - \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) - \mathcal{G}\left(\hat{m}_1^k - \hat{m}_2^k - \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}\right)\right] \\
& \left. + \left(\hat{m}_2^k - \frac{b_2}{2}\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\hat{m}_1^k - \hat{m}_2^k - \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{m}_1^k - \hat{m}_2^k - \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right)\right]\right) \qquad \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

mit

$$\mathcal{G}(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2+\left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2+\left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}} \quad .$$

Der Erwartungswert der rechten Grenze ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left\{{}^2R^k\right\} = \\
&\frac{1}{{}^2C_{LR}^k}\Bigg(\left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2\left[\mathcal{G}\left(\hat{m}_2^k-\hat{m}_1^k+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)-\mathcal{G}\left(\hat{m}_2^k-\hat{m}_1^k-\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)\right] \\
&+\left(\hat{m}_2^k+\frac{b_2}{2}\right)\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\hat{m}_2^k-\hat{m}_1^k+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2+\left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{\hat{m}_2^k-\hat{m}_1^k-\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2+\left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right)\right] \\
&+\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2\left[\mathcal{G}\left(\hat{m}_1^k-\hat{m}_2^k+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)-\mathcal{G}\left(\hat{m}_1^k-\hat{m}_2^k+\frac{b_1}{2}-\frac{b_2}{2}\right)\right] \\
&+\left(\hat{m}_2^k+\frac{b_2}{2}\right)\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\hat{m}_1^k-\hat{m}_2^k+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2+\left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{\hat{m}_1^k-\hat{m}_2^k+\frac{b_1}{2}-\frac{b_2}{2}}{\sqrt{\left(\hat{\sigma}_1^k\right)^2+\left(\hat{\sigma}_2^k\right)^2}}\right)\right]\Bigg) \quad . \qquad \text{(C.9)}
\end{aligned}$$

C.3 N Informationsquellen

Die obigen Betrachtungen für $N = 2$ werden nun auf eine beliebige Anzahl N von Informationsquellen verallgemeinert. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Herleitung von Rekursionsformeln für die Randdichten von linker und rechter Grenze.

C.3.1 Stochastische Fehler beliebiger Dichte

Zunächst erfolgt die Herleitung der Rekursionsformel für die Randdichte der linken Grenze ${}^iL^k$, welche die Informationen der Quellen $1, \ldots, i$ beinhaltet und durch

$${}^iL^k = \max\left({}^{i-1}L^k,\, \hat{\hat{X}}_i^k - \frac{b_i}{2}\right) \qquad \text{(C.10)}$$

definiert ist. Mit Hilfe des a priori Wissens über den deterministischen Fehler, ${}^ie_d \in \left[-\frac{b_i}{2},\, \frac{b_i}{2}\right]$, werden die Ungleichungen

$$\hat{x}_i^k - \frac{b_i}{2} \leq {}^{i-1}r^k, \quad \hat{x}_i^k + \frac{b_i}{2} \geq {}^{i-1}l^k \qquad \text{(C.11)}$$

für konkrete Realisierungen $\hat{x}_i^k$, ${}^{i-1}l^k$, ${}^{i-1}r^k$ formuliert. Mit (C.10) und (C.11) erhält man

$${}^if_L^k\left({}^il_k\right) = \frac{1}{{}^iC_L^k}\frac{\partial}{\partial\, {}^il_k}\int_{l=-\infty}^{{}^il_k}\int_{x=l-\frac{b_i}{2}}^{{}^il_k+\frac{b_i}{2}}\int_{r=x-\frac{b_i}{2}}^{\infty} \hat{f}_i^k(x)\; {}^{i-1}f_{LR}^k(l,r)\, dr\, dx\, dl \quad ,$$

wobei ${}^{i}C_{L}^{k}$ einen Normierungsfaktor bezeichnet. Damit ergibt sich

$$ {}^{i}f_{L}^{k}\left({}^{i}l_{k}\right) = \frac{1}{{}^{i}C_{L}^{k}} \tag{C.12} $$
$$ \left[\hat{f}_{i}^{k}\left({}^{i}l_{k}+\frac{b_{i}}{2}\right)\int_{l=-\infty}^{{}^{i}l_{k}}\int_{r={}^{i}l_{k}}^{\infty}{}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)\,dr\,dl+\int_{x={}^{i}l_{k}-\frac{b_{i}}{2}}^{{}^{i}l_{k}+\frac{b_{i}}{2}}\int_{r=x-\frac{b_{i}}{2}}^{\infty}\hat{f}_{i}^{k}\left(x\right){}^{i-1}f_{LR}^{k}\left({}^{i}l_{k},r\right)\,dr\,dx\right] . $$

Lemma. Das Doppelintegral

$$ \int_{l=-\infty}^{z}\int_{r=z}^{\infty}{}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)\,dr\,dl $$

über die Verbunddichte ${}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)$ kann mit Hilfe der Randdichten als

$$ \int_{l=-\infty}^{z}\int_{r=z}^{\infty}{}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)\,dr\,dl=\int_{y=-\infty}^{z}\left\{{}^{i-1}f_{L}^{k}\left(y\right)-{}^{i-1}f_{R}^{k}\left(y\right)\right\}\,dy \tag{C.13} $$

dargestellt werden.
Beweis. Es gilt

$$ \int_{l=-\infty}^{z}\int_{r=z}^{\infty}{}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)\,dr\,dl=\int_{l=-\infty}^{z}\int_{r=-\infty}^{\infty}{}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)\,dr\,dl-\int_{l=-\infty}^{z}\int_{r=-\infty}^{z}{}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)\,dr\,dl\ . $$

Beachtet man, daß ${}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)$ für $l>r$ verschwindet, so kann die obere Grenze des äußeren Integrals des zweiten Ausdrucks durch ∞ ersetzt werden. Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge im zweiten Ausdruck erhält man

$$ \int_{l=-\infty}^{z}\int_{r=z}^{\infty}{}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)\,dr\,dl=\int_{l=-\infty}^{z}{}^{i-1}f_{L}^{k}\left(l\right)\,dl-\int_{r=-\infty}^{z}{}^{i-1}f_{R}^{k}\left(r\right)\,dr\ , $$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Beachtet man erneut, daß ${}^{i-1}f_{LR}^{k}\left(l,r\right)$ für $l>r$ verschwindet, so kann (C.12) mit Hilfe des Lemmas weiter vereinfacht werden. Die untere Grenze $x-\frac{b_i}{2}$ des inneren Integrals des zweiten Summanden kann nämlich durch $-\infty$ ersetzt werden. Damit erhält man die gesuchte Rekursionsformel für die Randdichte der linken Grenze zu

$$ {}^{i}f_{L}^{k}\left(l\right)= \tag{C.14} $$
$$ \left[\hat{f}_{i}^{k}\left(l+\frac{b_{i}}{2}\right)\int_{y=-\infty}^{l}\left\{{}^{i-1}f_{L}^{k}\left(y\right)-{}^{i-1}f_{R}^{k}\left(y\right)\right\}\,dy+{}^{i-1}f_{L}^{k}\left(l\right)\int_{x=l-\frac{b_{i}}{2}}^{l+\frac{b_{i}}{2}}\hat{f}_{i}^{k}\left(x\right)dx\right]\Big/{}^{i}C_{L}^{k}\ . $$

Analog ergibt sich die Rekursionsformel für die Randdichte der rechten Grenze zu

$$ {}^{i}f_{R}^{k}\left(r\right)= \tag{C.15} $$
$$ \left[\hat{f}_{i}^{k}\left(r-\frac{b_{i}}{2}\right)\int_{y=-\infty}^{r}\left\{{}^{i-1}f_{L}^{k}\left(y\right)-{}^{i-1}f_{R}^{k}\left(y\right)\right\}\,dy+{}^{i-1}f_{R}^{k}\left(r\right)\int_{x=r-\frac{b_{i}}{2}}^{r+\frac{b_{i}}{2}}\hat{f}_{i}^{k}\left(x\right)dx\right]\Big/{}^{i}C_{R}^{k}\ , $$

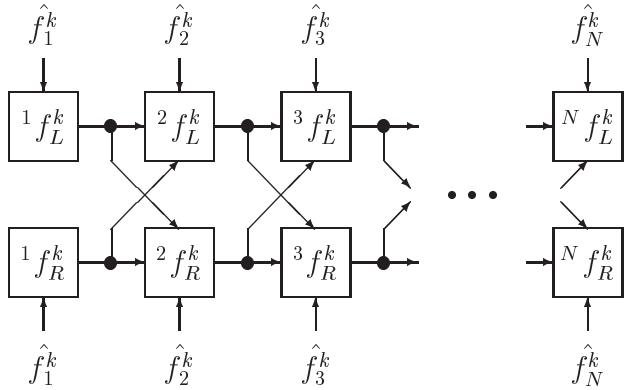


Abbildung C.2: Struktur der Rekursion für die Randdichten von linker und rechter Grenze im Falle von N Informationsquellen.

wobei ${}^iC_R^k$ einen Normierungsfaktor bezeichnet.

Die Struktur dieser Rekursion für die Randdichten von linker und rechter Grenze ist in Abb. C.2 dargestellt, die Initialisierung lautet

$$ {}^1f_L^k = \hat{f}_1^k\left(l+\frac{b_1}{2}\right) \quad , \tag{C.16} $$

$$ {}^1f_R^k = \hat{f}_1^k\left(r-\frac{b_1}{2}\right) \quad . \tag{C.17} $$

C.3.2 Gaußverteilte stochastische Fehler

Bei $\hat{f}_i^k$, $i=1,\ldots,N$, handelt es sich erneut um Gaußdichten. Damit vereinfachen sich die obigen Rekursionsformeln zu

$$ \begin{aligned} {}^if_L^k(l) &= \frac{1}{{}^iC_L^k}\Bigg[\hat{f}_i^k\left(l+\frac{b_i}{2}\right)\int\limits_{y=-\infty}^{l}\left\{{}^{i-1}f_L^k(y)-{}^{i-1}f_R^k(y)\right\}dy \\ &\quad + {}^{i-1}f_L^k(l)\left(\operatorname{erf}\left(\frac{l+\frac{b_i}{2}-\hat{m}_i^k}{\hat{\sigma}_i^k}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{l-\frac{b_i}{2}-\hat{m}_i^k}{\hat{\sigma}_i^k}\right)\right)\Bigg] \quad , \end{aligned} \tag{C.18} $$

$$ \begin{aligned} {}^if_R^k(r) &= \frac{1}{{}^iC_R^k}\Bigg[\hat{f}_i^k\left(r-\frac{b_i}{2}\right)\int\limits_{y=-\infty}^{r}\left\{{}^{i-1}f_L^k(y)-{}^{i-1}f_R^k(y)\right\}dy \\ &\quad + {}^{i-1}f_R^k(r)\left(\operatorname{erf}\left(\frac{r+\frac{b_i}{2}-\hat{m}_i^k}{\hat{\sigma}_i^k}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{r-\frac{b_i}{2}-\hat{m}_i^k}{\hat{\sigma}_i^k}\right)\right)\Bigg] \quad . \end{aligned} \tag{C.19} $$

C.4 Simulative Beispiele zur Lokalisierung mobiler Roboter

Zwei Grenzfälle der Messung verschiedener Informationsquellen werden durch simulative Beispiele illustriert. Im ersten Fall werden zunächst ausschließlich Messungen der ersten

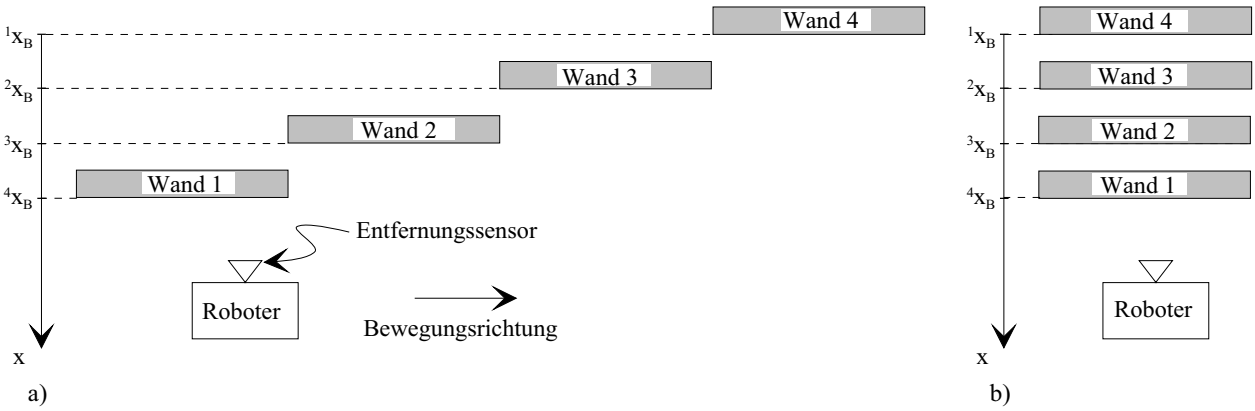


Abbildung C.3: Experiment zur eindimensionalen Lokalisierung eines mobilen Roboters: a) sequentielle Messung, b) simultane Messung.

Wand	1	2	3	4
exakter Wert ${}^i\tilde{x}_B$	125	82	28	6
Nominalwert ${}^i x_B$	120	80	40	0
Grenze b_i	40	20	30	20
Standardabweichung σ_i	10	10	10	10

Tabelle C.1: Parameter des Lokalisierungsexperiments.

Quelle vorgenommen, dann der zweiten Quelle, und so weiter. Im zweiten Fall sind zu jedem Zeitschritt Messungen aller Informationsquellen verfügbar.

Betrachtet wird ein mobiler Roboter mit einem bordeigenem Entfernungssensor, der den Abstand zu vier Wänden mißt, siehe Abb. C.3. Die Positionen der Wände seien lediglich innerhalb einer geometrischen Toleranz bekannt, d.h.

$$ {}^i x_B = {}^i\tilde{x}_B + {}^i\Delta x_B \ , \quad \text{mit } \left|{}^i\Delta x_B\right| \leq \frac{b_i}{2} \ , $$

wobei ${}^i\Delta x_B$ die unbekannte, aber beschränkte Abweichung des Nominalwerts ${}^i x_B$ von der unbekannten exakten Position ${}^i\tilde{x}_B$ bezeichnet. Die Abstandsmessungen des Entfernungssensors seien mit einem additiven weißen gaußverteilten Rauschen mit Erwartungswert Null und Varianz σ_i^2 behaftet. Damit lautet die Meßgleichung

$$ {}^i x_B + D_i^k = x + {}^i\Delta x_B + {}^i E_s^k \ , $$

wobei ${}^i E_s^k \sim N(0, \sigma_i)$ den stochastischen Fehler bezeichnet, x die Fahrzeugposition und D_i^k den gemessenen Abstand. Die Simulationen für die beiden Grenzfälle werden mit einer exakten Fahrzeugposition von $x = 200$ und den Parametern gemäß Tabelle C.1 durchgeführt.

$\hat{f}_i^k(x)$ ist nun eine Gaußdichte, deren Erwartungswert und Varianz *zeit*rekursiv durch Messung von Quelle i zu

$$\hat{m}_i^k = \frac{\left(\hat{\sigma}_i^{k-1}\right)^{-2}\hat{m}_i^{k-1} + (\sigma_i)^{-2}\left({}^{i}x_B + d_i^k\right)}{\left(\hat{\sigma}_i^{k-1}\right)^{-2} + (\sigma_i)^{-2}}\ , \tag{C.20}$$

$$\left(\hat{\sigma}_i^k\right)^2 = \left(\left(\hat{\sigma}_i^{k-1}\right)^{-2} + (\sigma_i)^{-2}\right)^{-1}\ , \tag{C.21}$$

mit $\hat{m}_i^0 = 0$, $\left(\hat{\sigma}_i^0\right)^{-1} = 0$ bestimmt werden [100].

Die erste Simulation bezieht sich auf die in Abb. C.3 a) dargestellte Situation, bei der sich der mobile Roboter entlang der vier Wände bewegt. Der Abstand zu den Wänden wird sequentiell jeweils einhundertmal gemessen. Bei Messung des Abstands zu Wand 1 ergeben sich die Randdichten einfach als verschobene Version von $\hat{f}_1^k(x)$ gemäß (C.16) und (C.17). Die Randdichten für $k = 100$ dienen als Initialisierung für die Rekursionsgleichungen (C.18) und (C.19), die verwendet werden, um sequentiell die Informationsquellen 2, 3 und 4 einzubeziehen. Der Rekursionsschritt des SSI–Filters von $i-1$ nach i wird nach jedem zeitlichen Rekursionsschritt (C.20), (C.21) durchgeführt, also jeweils einhundertmal für die Wände 2, 3 und 4.

Abb. C.4 a) zeigt den zeitlichen Verlauf des Erwartungswerts für die linke und für die rechte Grenze der Intervallschätzung. Mehrere Messungen für eine Wand reduzieren die stochastische Unsicherheit. Die deterministische Unsicherheit, die anfänglich durch das Intervall [175, 215] gegeben ist, wird jeweils beim Wechsel zur nachfolgenden Wand reduziert. Beim Wechsel von Wand 1 zu Wand 2 lautet das zugrundeliegende rauschfreie Schnittintervall [188, 208], welches für eine große Anzahl von Messungen für Wand 2 gut approximiert wird. Beim Übergang von Wand 2 zu Wand 3 wird lediglich die Schätzung der linken Grenze merklich verändert, da das zugrundeliegende rauschfreie Schnittintervall durch [197, 208] gegeben ist. Der Übergang von Wand 3 zu Wand 4 bewirkt eine verbesserte Schätzung der rechten Grenze, das zugrundeliegende rauschfreie Schnittintervall lautet [197, 204].

Die zweite Simulation bezieht sich auf die in Abb. C.3 b) dargestellte Situation, bei der der Abstand zu allen vier Wänden zu jedem Zeitpunkt t_k simultan gemessen wird. Die zeitliche Rekursion (C.20), (C.21) wird zu jedem Zeitpunkt t_k für jede Informationsquelle i durchgeführt. Anschließend erfolgt zu jedem Zeitpunkt t_k die Rekursion (C.18), (C.19) des SSI–Filters, beginnend mit der Initialisierung (C.16), (C.17), bis zur Wand 4. Das zugrundeliegende rauschfreie Schnittintervall beträgt bei dieser Simulation [197, 204]. Dieses Intervall wird für eine große Anzahl von Messungen durch das SSI–Filter erreicht.

Abbildung C.4 zeigt deutlich die realistische Abschätzung der Unsicherheit durch das SSI–Filter auch für eine große Anzahl von Messungen im Gegensatz zur überoptimistischen Abschätzung bei Verwendung eines Punktschätzers.

C.5 Schlußbemerkungen

Mit dem SSI–Filter (Statistical and Set–theoretic Information filter) wurde ein neuer Ansatz zur Fusion der Daten mehrerer Informationsquellen, die gleichzeitig mit einem deterministischen amplitudenbegrenzten Fehler und einem (im allgemeinen unbegrenzten) stochastischen Fehler behaftet sind, vorgestellt. Der neue Ansatz vereint bewährte Schemata zur Behandlung eines rein stochastischen Fehlers und zur Behandlung eines amplitudenbegrenzten Fehlers. Bei der resultierenden Schätzung handelt es sich um eine Menge, deren Begrenzung im

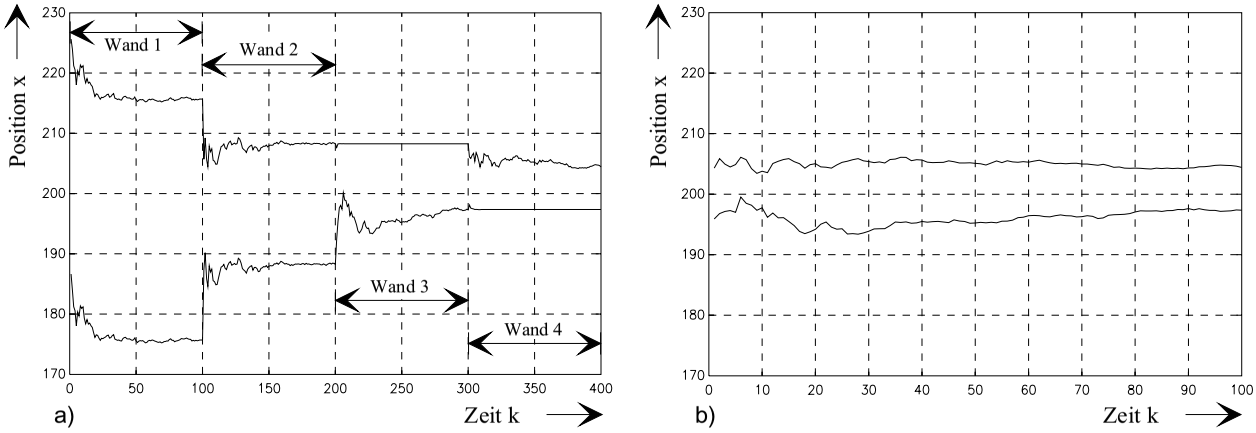


Abbildung C.4: Erwartungswerte für linke und rechte Grenze: a) sequentielle Messung, b) simultane Messung.

statistischen Sinne unsicher ist. Damit erhält man eine realistische Abschätzung der Unsicherheit durch das SSI–Filter auch für jene Fälle, in denen die Vernachlässigung eines Fehlertyps zu einer überoptimistischen Abschätzung der Unsicherheit führt. Simulationen zur Lokalisierung eines mobilen Roboters verdeutlichen die Wirkungsweise des SSI–Filters, vor allem die konzeptionell unterschiedliche Reduktion von deterministischer und stochastischer Unsicherheit während des Meßprozesses.

Die Untersuchung beschränkte sich zunächst auf den Fall eines skalaren, statischen Zustands. Eine Verallgemeinerung auf den Fall eines statischen Zustandsvektors beliebiger Dimension ist unkompliziert, solange man sich auf eine Beschreibung der deterministischen Unsicherheit durch einen achsenparallelen Hyperquader beschränkt. Verwendet man dagegen die geläufige Beschreibung der deterministischen Unsicherheit durch ein Ellipsoid, so werden die Verhältnisse sehr verwickelt, da es sich bei der Schnittmenge zweier Ellipsoide im allgemeinen nicht um ein Ellipsoid handelt.

Literaturverzeichnis

Lokalisierung mobiler Systeme:

[1] Y. Ando, T. Tsubouchi, und S. Yuta: A Reactive Wall Following Algorithm and Its Behavior of an Autonomous Mobile Robot with Sonar Ring. *Journal of Robotics and Mechatronics*, Bd. 8 (1996) Heft 1, S. 33–39.

[2] S. Atiya und G. D. Hager: Real–Time Vision–Based Localization. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Bd. 9 (1993) Heft 6, S. 785–800.

[3] S. Atiya: *Navigation von mobilen Robotern mit Hilfe bildgebender Sensoren: Ein Mengenbasierter Ansatz.* Dissertation an der Bergischen Universität Wuppertal, VDI Verlag, 1995.

[4] Burks u.a.: Autonomous Navigation, Exploration, and Recognition Using the HERMIES IIB Robot. *IEEE Expert*, Bd. 2 (1987) Heft 4, S. 18–27.

[5] J. L. Crowley: Dynamic World Modelling for an Intelligent Mobile Robot Using a Rotating Ultrasonic Ranging Device. In *Proceedings of the 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation, St. Louis, MO*, 1985.

[6] J. L. Crowley: World Modeling and Position Estimation for a Mobile Robot Using Ultrasonic Sensing. In *Proceedings of the 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Scottsdale, AZ*, S. 674–680, 1989.

[7] A. Curran und K. J. Kyriakopoulos: Sensor-Based Self–Localization for Wheeled Mobile Robots. In *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, GA*, S. 8–13, 1993.

[8] A. Curran und K. J. Kyriakopoulos: Ultrasonic Navigation for a Wheeled Nonholonomic Vehicle. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Bd. 12 (1995) Heft 3, S. 239–258.

[9] E. D. Dickmanns, B. Mysliwetz und T. Christians: An Integrated Spatio–Temporal Approach to Automatic Visual Guidance of Autonomous Vehicles. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Bd. 20 (1990) Heft 6, S. 1273–1284.

[10] E. D. Dickmanns: The 4D–Approach to Dynamic Machine Vision. *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL*, S. 3770–3775, 1994.

[11] M. Drumheller: Mobile Robot Localization Using Sonar. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Bd. 9 (1987) Heft 2, S. 325–332.

[12] W. E. L. Grimson und T. Lozano-Pérez: Recognition and Localization of Overlapping Parts From Sparse Data in One and Two Dimensions. In *Proceedings of the 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation, St. Louis, MO*, S. 61–66, 1985.

[13] A. A. Holenstein, M. A. Müller, und E. Badreddin: Mobile Robot Localization in a Structured Environment Cluttered with Obstacles. In *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, France*, S. 2576–2581, 1992.

[14] J. Horn: *Bahnführung eines mobilen Roboters mittels absoluter Lagebestimmung durch Fusion von Entfernungsbild– und Koppelnavigationsdaten.* Dissertation an der Technischen Universität München, VDI Verlag, 1997.

[15] G. Lawitzky, W. Feiten, und M. Möller: Sonar Sensing for Low–Cost Indoor Mobility. *Robotic and Autonomous Systems, Elsevier Science*, Bd. 14 (1995) Heft 2–3, S. 149–157.

[16] J. J. Leonard und H. F. Durrant-Whyte: Mobile Robot Localization by Tracking Geometric Beacons. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Bd. 7 (1991) Heft 3, S. 376–382.

[17] R. Malik und B. Benteftifa. Robot Position Estimation Using Range and Compass Data. *SPIE Mobile Robots*, Bd. 1613 (1991) Heft VI, S. 245–256.

[18] D. Miller: Two Dimensional Mobile Robot Positioning Using Onboard Sonar. In *Proceedings of the 9th William T. Pecora Memorial Remote Sensing Symposium, IEEE, USGS, NASA, ASP, Sioux Falls, SD*, S. 362–369, 1984.

[19] B. Steer und T. Atherton: Design for Navigation. In *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Cincinnati, OH*, S. 942–947, 1990.

[20] M. Takano u.a.: Study on Mobile Robot Navigation Control by Internal and External Sensor Data with Ultrasonic Sensors. In *IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '89, Tsukuba, Japan*, S. 456–463, 1989.

[21] Y. Yagi, Y. Nishizawa und M. Yachida: Map–Based Navigation for a Mobile Robot with Omnidirectional Image Sensor COPIS. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Bd. 11 (1995) Heft 5, S. 634–648.

Auswertung von Sensordaten, Winkelmeßsysteme:

[22] M. Betke und L. Gurvits: Mobile Robot Localization Using Landmarks. In *Proceedings of the 1994 IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems, Munich, Germany*, S. 135–142, 1994.

[23] E. Krotkov: Mobile Robot Localization Using A Single Image. In *Proceedings of the 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Scottsdale, AZ*, S. 978–983, 1989.

[24] T. Nishizawa, A. Ohya, und S. Yuta: An Implementation of On–board Position Estimation for a Mobile Robot. In *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Japan*, S. 395–400, 1995.

[25] E. Stella und A. Distante: Self–Location of a Mobile Robot by Estimation of Camera Parameters. *Robotics and Autonomous Systems*, Bd. 15 (1995) S. 179–187.

[26] K. Sugihara: Some Location Problems for Robot Navigation Using a Single Camera. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Bd. 42 (1988) S. 112–129.

[27] K. T. Sutherland und W. B. Thompson: Inexact Navigation. In *Proceedings of the 1993 International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, GA*, S. 1–7, 1993.

[28] K. T. Sutherland und W. B. Thompson: Localizing in Unstructured Environments: Dealing with the Errors. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Bd. 10 (1994) Heft 6, S. 740–754.

[29] T. Tsumura, H. Okubo, und N. Komatsu: A 3-D Position and Attitude Measurement System Using Laser Scanners and Corner Cubes. In *Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Yokohama, Japan*, S. 604–611, 1993.

[30] U. Wiklund, U. Andersson, und K. Hyyppä: AGV Navigation by Angle Measurements. In *Proceedings of the 6th International Conference on Automated Guided Vehicle Systems, Brussels, Belgium*, S. 199–212, 1988.

Auswertung von Sensordaten, Distanzsensoren:

[31] J. S. Abel und J. O. Smith: Source Range and Depth Estimation from Multipath Range Difference Measurements. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Bd. 37 (1989) Heft 8, S. 1157–1165.

[32] H. Akbarally und L. Kleeman: A Sonar Sensor for Accurate 3D Target Localisation and Classification. In *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Japan*, S. 3003–3008, 1995.

[33] K. Audenart, H. Peremans, Y. Kawahara, und J. Van Campenhout: Accurate Ranging of Multiple Objects using Ultrasonic Sensors. In *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, France*, S. 1733–1738, May 1992.

[34] S. Bancroft: An Algebraic Solution of the GPS Equations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 21 (1984) Heft 7, S. 56–59.

[35] M. Bhushan, L. G. Hassebrock, H. Hejase, K. Donohue, und J. Li: Acoustic Spherical Array Prototype Omni–Directional Imaging System. In *Proceedings of the 1992 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Raleigh, NC*, S. 845–850, 1992.

[36] J. Borenstein und Y. Koren: Obstacle Avoidance with Ultrasonic Sensors. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Bd. 4 (1988) Heft 2, S. 213–218.

[37] J. Borenstein und Y. Koren: Noise Rejection for Ultrasonic Sensors in Mobile Robot Applications. In *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, France*, S. 1727–1732, May 1992.

[38] Ö. Bozma und R. Kuc: Characterizing the Environment Using Echo Energy, Duration, and Range: the ENDURA Method. In *Proceedings of the 1992 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Raleigh, NC*, S. 813–820, 1992.

[39] M. K. Brown: On Ultrasonic Detection of Surface Features. In *Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, CA*, S. 1785–1790, 1986.

[40] Y. T. Chan und K. C. Ho: A Simple and Efficient Estimator for Hyperbolic Location. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Bd. 42 (1994) Heft 8, S. 1905–1915.

[41] A. Elfes: Sonar–Based Real–World Mapping and Navigation. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Bd. 3 (1987) Heft 3, S. 249–265.

[42] A. Elfes: Dynamic Control of Robot Perception Using Stochastic Spatial Models. In *Information Processing in Autonomous Mobile Robots, Proceedings of the International Workshop, 6–8 März 1991, Technische Universität München, Germany, ed. G. Schmidt*, S. 77–92.

[43] B. T. Fang: Simple Solutions for Hyperbolic and Related Position Fixes. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 26 (1990) Heft 5, S. 748–753.

[44] W. H. Foy: Position–Location Solutions by Taylor–Series Estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 12 (1976) Heft 2, S. 187–194.

[45] B. Friedlander: A Passive Localization Algorithm and Its Accuracy Analysis. *IEEE Transactions of Oceanic Engineering*, Bd. 12 (1987) Heft 1, S. 234–245.

[46] L. Kleeman und R. Kuc: An Optimal Sonar Array for Target Localization and Classification. In *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego, CA*, S. 3130–3135, 1994.

[47] L. Kleeman: A Three Dimensional Localiser for Autonomous Robot Vehicles. *Robotica*, Bd. 13 (1995) Heft 1, S. 87–94.

[48] L. Kleeman und R. Kuc: Mobile Robot Sonar for Target Localization and Classification. *The International Journal of Robotics Research*, Bd. 14 (1995) Heft 4, S. 295–318.

[49] A. C. Knoll: Ultrasonic Holography Techniques for Localizing and Imaging Solid Objects. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Bd. 7 (1991) Heft 4, S. 449–467.

[50] L. Korba: Variable Aperture Sonar for Mobile Robots. In *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego, CA*, S. 3136–3141, 1994.

[51] R. Kuc und M. W. Siegel: Physically Based Simulation Model for Acoustic Sensor Robot Navigation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Bd. 9 (1987) Heft 6, S. 766–778.

[52] R. Kuc und M. W. Siegel: Efficient Representation of Reflecting Structures for a Sonar Navigation Model. In *Proceedings of the 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Rayleigh, NC*, S. 1916–1923, 1987.

[53] R. Kuc und B. Barshan: Bat–Like Sonar for Guiding Mobile Robots. *IEEE Control Systems Magazine*, Bd. 12 (1992) Heft 4, S. 4–12.

[54] H. M. Li und L. Kleeman: A Low Sample Rate 3D Sonar Sensor for Mobile Robots. In *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Japan*, S. 3015–3020, 1995.

[55] J. H. Lim und D. W. Cho: Physically Based Sensor Modeling of a Sonar Map in a Specular Environment. In *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, France*, S. 1714–1719, 1992.

[56] W. S. H. Munro u.a.: An Ultrasonic Vehicle Guidance System. In *IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '89, Tsukuba, Japan*, S. 224–227, 1989.

[57] Y. Nagashima und S. Yuta: Ultrasonic Sensing for a Mobile Robot to Recognize an Environment – Measuring the Normal Direction of Walls –. In *Proceedings of the 1992 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Raleigh, NC*, S. 805–812, 1992.

[58] H. Peremans, J. Van Campenhout, und L. Levrouw: Steps Towards Tri–Aural Perception. *SPIE Sensor Fusion*, Bd. 1611 (1991) Heft IV, S. 165–176.

[59] H. Peremans und J. Van Campenhout: Tri–Aural Perception on a Mobile Robot. In *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, GA*, S. 265–270, 1993.

[60] H. Peremans, K. Audenaert, und J. Van Campenhout: A High–Resolution Sensor Based on Tri–Aural Perception. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Bd. 9 (1993) Heft 1, S. 36–48.

[61] S. S. Reddi: An Exact Solution to Range Computation with Time Delay Information for Arbitrary Array Geometries. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Bd. 41 (1993) Heft 1, S. 485–486.

[62] A. M. Sabatini: Active Hearing for External Imaging Based on a Ultrasonic Transducer Array. In *Proceedings of the 1992 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Raleigh, NC*, S. 829–836, 1992.

[63] A. M. Sabatini und O. Di Benedetto: Towards a Robust Methodology for Mobile Robot Localisation Using Sonar. In *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego, CA*, S. 3142–3147, 1994.

[64] K. Sasaki und M. Takano: Classification of Objects' Surface by Acoustic Transfer Function. In *Proceedings of the 1992 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Raleigh, NC*, S. 821–828, 1992.

[65] H. C. Schau und A. Z. Robinson: Passive Source Localization Employing Intersecting Spherical Surfaces from Time–Of–Arrival Differences. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Bd. 35 (1987) Heft 8, S. 1223–1225.

[66] R. O. Schmidt: A New Approach to Geometry of Range Difference Location. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 8 (1972) Heft 6, S. 821–835.

[67] J. O. Smith und J. S. Abel: Closed–Form Least–Squares Source Location Estimation from Range–Difference Measurements. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Bd. 35 (1987) Heft 12, S. 1661–1669.

[68] K. Teramoto und H. Yamasaki: Omnidirectional Holographic Sonar for Look–around Type Robotic Sensors. In *Proceedings of the 11th Triennial World Congress of the International Measurement Confederation, IMEKO XI, Houston, TX*, S. 367–379, 1988.

[69] D. Wilkes u.a.: Multi-Transducer Sonar Interpretation. In *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, GA*, S. 392–397, 1993.

Statistische Methoden zur Zustandsschätzung:

[70] D. L. Alspach und H. W. Sorenson: Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Sum Approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 17 (1972), Heft 4, S. 439–448.

[71] B. D. O. Anderson und J. B. Moore: *Optimal Filtering.* Prentice–Hall, 1979.

[72] R. S. Bucy und K. D. Senne: Digital Synthesis of Non–linear Filters. *Automatica*, Bd. 7 (1971) S. 287–298.

[73] H. F. Durrant-Whyte u.a.: Toward a Fully Decentralized Architecture for Multi–Sensor Data Fusion. In *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Cincinnati, OH*, S. 1331–1336, 1990.

[74] B. Friedland: Treatment of Bias in Recursive Filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 14 (1969) Heft 4, S. 359–367.

[75] J. K. Hackett und M. Shah: Multi–Sensor Fusion: A Perspective. In *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Cincinnati, OH*, S. 1324–1330, 1990.

[76] B. Hochwald und A. Nehorai: Minimum Bias Priors for Estimating Parameters of Additive Terms in State–Space Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 40 (1995) Heft 4, S. 684–693.

[77] R. C. Luo und M. G. Kay: Multisensor Integration and Fusion in Intelligent Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Bd. 19 (1989) Heft 5, S. 901–931.

[78] B. S. Y. Rao, H. F. Durrant-Whyte, und J. A. Sheen: A Fully Decentralized Multi–Sensor System for Tracking and Surveillance. *The International Journal of Robotic Research*, Bd. 12 (1993) Heft 1, S. 20–44.

Mengenbasierte Methoden zur Zustandsschätzung:

[79] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, und V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequailities in System and Control Theorie.* SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[80] F. L. Chernousko: *State Estimation for Dynamic Systems.* CRC Press, 1994.

[81] M.-F. Cheung, S. Yurkovich, und K. M. Passino: An Optimal Volume Ellipsoid Algorithm for Parameter Set Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 38 (1993) Heft 8, S. 1292–1296.

[82] P. L. Combettes und H. J. Trussell: The Use of Noise Properties in Set Theoretic Estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Bd. 39 (1991) Heft 7, S. 1630–1641.

[83] P. L. Combettes und H. J. Trussell: Set Theoretic Estimation by Random Search. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Bd. 39 (1991) Heft 7, S. 1669–1671.

[84] P. L. Combettes: The Foundations of Set Theoretic Estimation. *Proceedings of the IEEE*, Bd. 81 (1993) Heft 2, S. 182–208.

[85] J. R. Deller: Set Membership Identification in Digital Signal Processing. *IEEE ASSP Magazine*, Bd. 6 (1989) S. 4–20.

[86] J. R. Deller und T. C. Luk: Linear Prediction Analysis of Speech Based on Set–Membership Theory. *Computer Speech and Language*, Bd. 3 (1989) S. 301–327.

[87] J. R. Deller, M. Nayeri, und S. F. Odeh: Least–Squares Identification with Error Bounds for Real–Time Signal Processing and Control. *Proceedings of the IEEE*, Bd. 81 (1993) Heft 6, S. 815–849.

[88] J. R. Deller und S. F. Odeh: Adaptive Set–Membership Identification in O(m) Time for Linear–in–Parameters Models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Bd. 41 (1993) Heft 5, S. 1906–1924.

[89] G. D. Hager, S. P. Engelson, und S. Atiya: On Comparing Statistical and Set–Based Methods in Sensor Data Fusion. In *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, GA*, S. 352–358, 1993.

[90] W. Kahan: Circumscribing An Ellipsoid About the Intersection of Two Ellipsoids. *Canad. Math Bull.*, Bd. 11 (1968) Heft 3, S. 437–441.

[91] W. C. Karl, G. C. Verghese, und A. S. Willsky: Reconstructing Ellipsoids from Projections. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, Bd. 56 (1994) Heft 2, S. 124–139.

[92] T. H. Kerr: Real–Time Failure Detection: A Static Non–Linear Optimization Problem That Yields a Two Elliposid Overlap Test. *Journal on Optimization Theory Applications*, Bd. 2 (1977) S. 509–536.

[93] M. Milanese und G. Belaforte: Estimation Theory and Uncertainty Intervals Evaluation in the Presence of Unknown but Bounded Errors: Linear Families of Models and Estimates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 27 (1982) S. 408–414.

[94] D. R. Morrell und W. C. Stirling: Set–Valued Filtering and Smoothing. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Bd. 21 (1991) Heft 1, S. 184–193.

[95] J. W. Perram und M. S. Wertheim: Statistical Mechanics of Hard Ellipsoids. I. Overlap Algorithm and the Contact Function. *Journal of Computational Physics*, Bd. 58 (1985) S. 409–416.

[96] A. Preciado, D. Meizel, A. Segovia, und M. Rombaut: Fusion of Multi–Sensor Data: A Geometric Approach. In *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, CA*, S. 2806–2811, 1991.

[97] A. K. Rao, Y.-F. Huang, und S. Dasgupta: ARMA Parameter Estimation Using a Novel Recursive Estimation Algorithm with Selective Updating. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Bd. 38 (1990) Heft 3, S. 447–457.

[98] A. Sabater und F. Thomas: Set Membership Approach to the Propagation of Uncertain Geometric Information. In *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, CA*, S. 2718–2723, 1991.

[99] F. C. Schweppe: Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 13 (1968) S. 22–28.

[100] F. C. Schweppe: *Uncertain Dynamic Systems.* Prentice–Hall, 1973.

[101] A. Vicino und G. Zappa: Sequential Approximation of Feasible Parameter Sets for Identification with Set Membership Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 41 (1995) Heft 6, S. 774–785.

[102] E. Walter und H. Piet-Lahanier: Exact Recursive Polyhedral Description of the Feasible Parameter Set for Bounded Error Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 34 (1989) Heft 8, S. 911–915.

[103] A. Zolghadri, B. Bergeon, und M. Monsion: A Two–Ellipsoid Overlap Test for On–line Failure Detection. *Automatica*, Bd. 29 (1993) Heft 6, S. 1517–1522.

Mathematische Grundlagen:

[104] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik.* Harri Deutsch, 1985.

[105] G. H. Golub und C. F. Van Loan: *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press, 1989.

[106] A. Papoulis: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.* McGraw–Hill, 1984.

[107] H. W. Sorenson: *Parameter Estimation.* Marcel Dekker, 1980.

[108] R. Zurmühl und S. Falk: *Matrizen und ihre Anwendungen.* Springer, 1986.

Anwendungen von Servicerobotern:

[109] C. Hofner und G. Schmidt: Path Planning and Guidance Techniques for an Autonomous Mobile Cleaning Robot. In V. Gräfe, Hrsg. *Intelligent Robots and Systems 1994 (IROS'94)*, S. 241–257. Elsevier Science, Amsterdam, 1995.

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit am Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik der TU München entstandene, eigene Veröffentlichungen:

[110] U. D. Hanebeck und G. Schmidt: A New High Performance Multisonar System for Fast Mobile Robots. In *Proceedings of the 1994 IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems, Munich, Germany*, S. 1853–1860, 1994.

[111] U. D. Hanebeck und G. Schmidt: A New High Performance Multisonar System for Fast Mobile Robot Applications. In V. Gräfe, Hrsg. *Intelligent Robots and Systems 1994 (IROS'94)*, S. 1–14. Elsevier Science, Amsterdam, 1995.

[112] S. Maier und U. D. Hanebeck: Fuzzy Guidance of Omnidirectional Mobile Robots Including Sensor–Based Obstacle Avoidance. In *Proceedings of the TELEMAN Student Research Projects Congress, July, Noordwijkerhout, The Netherlands*, S. 95–100, 1995.

[113] U. D. Hanebeck und G. K. Schmidt: Absolute Localization of Fast Mobile Robots Based on an Angle Measurement Technique. In *19th Annual German Conference on Artificial Intelligence, KI–95, Bielefeld, Sept. 11–13*, S. 164–166, 1995.

[114] U. D. Hanebeck und G. Schmidt: Absolute Localization of Fast Mobile Robots Based on an Angle Measurement Technique. In *IFAC Workshop on Intelligent Components for Autonomous and Semi–Autonomous Vehicles, Toulouse, France*, S. 87–92, 1995.

[115] U. D. Hanebeck und G. Schmidt: Schnelle Objektdetektion mit Ultraschallsensor–Arrays. In R. Dillmann, U. Rembold, und T. Lüth, Hrsg. *Autonome Mobile Systeme 1995, (11. Fachgespräch, 30. Nov. – 1. Dez. 1995, Karlsruhe)*, S. 162–171.

[116] U. D. Hanebeck und G. Schmidt: Set–theoretic Localization of Fast Mobile Robots Using an Angle Measurement Technique. In *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, MN*, Bd. 2, S. 1387–1394, 1996.

[117] U. D. Hanebeck, J. Horn, und G. Schmidt: On Combining Set–theoretic and Bayesian Estimation. In *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, MN*, Bd. 4, S. 3081–3086, 1996.

[118] U. D. Hanebeck und G. Schmidt: Closed–Form Elliptic Location with an Arbitrary Array Topology. In *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Atlanta, GA*, Bd. 6, S. 3070–3073, 1996.

[119] U. D. Hanebeck und G. Schmidt: Genetic optimization of fuzzy networks. *Journal of Fuzzy Sets and Systems, Special Issue on Neuro–Fuzzy Techniques and Applications*, Bd. 79 (1996) S. 59–68.

[120] U. D. Hanebeck und G. Schmidt: Localization of Fast Mobile Robots Using an Advanced Angle–Measurement Technique. *IFAC Control Engineering Practice*, Bd. 4 (1996) Heft 8, S. 1109–1118.

[121] W. Daxwanger, E. Ettelt, C. Fischer, F. Freyberger, U. Hanebeck, und G. Schmidt: ROMAN: Ein mobiler Serviceroboter als persönlicher Assistent in belebten Innenräumen. In G. Schmidt und F. Freyberger, Hrsg. *Autonome Mobile Systeme 1996, (12. Fachgespräch, 14. – 15. Okt. 1996, München).*

Im Rahmen dieser Arbeit am Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik der TU München angefertigte Studien– und Diplomarbeiten:

[SA1] J.-F. Pelat: Basis eines graphischen Visualisierungs– und Steuerungssystems für ROMAN. Studienarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1993.

[SA2] E. Roul: Lokalisierung eines mobilen Roboters mit Hilfe von Winkelmessungen. Studienarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1993.

[DA1] N. P. Bögholm: Hindernislagebestimmung mit dem Multisonarsystem des automomen mobilen Roboters MACROBE. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1993.

[DA2] H. J. R. Berger: Beiträge zum Ultraschallsensorsystem des mobilen Manipulators ROMAN. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1993.

[DA3] B. Maier: Entwurf eines Bahnregelungskonzeptes für den mobilen Manipulator ROMAN. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1993.

[DA4] F. Hacker: Aufbau und Test eines Lasermeßsystems für die Lokalisierung von Roboterfahrzeugen. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1994.

[DA5] R. Richter: Implementierung der Fahrzeugsteuerung für den mobilen Manipulator ROMAN. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1994.

[DA6] J. Stegmeier: Lokalisierung mit dem Ultraschallsensorsystem des mobilen Manipulators ROMAN. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1994.

[DA7] S. Maier: Fuzzy–Netzwerke zur Führung des mobilen Manipulators ROMAN. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1995.

[DA8] R. Süss: Absolute Lokalisierung des mobilen Manipulators ROMAN mit Multisonar– und Lasernavigationssystem. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Steuerungs– und Regelungstechnik, TU München, 1996.

Lebenslauf

Name:	Uwe Dietrich Hanebeck
Geburtsdatum:	14.06.1965
Geburtsort:	Iserlohn, Westfalen
Familienstand:	verheiratet, ein Kind
Staatsangehörigkeit:	deutsch

Bildungsgang

8/75 - 5/85	Märkisches Gymnasium Iserlohn
5/85 - 9/85	Industriepraktikum in einem metallverarbeitenden Betrieb
3/86 - 8/86	Industriepraktikum bei einem Elektronikunternehmen
10/86 - 9/88	Grundstudium der Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum
10/88 - 7/89 6/90 - 4/91	Hauptstudium mit den Schwerpunkten Nachrichtentechnik, Digitale Signalverarbeitung und Signaltheorie
8/89 - 5/90	Zweisemestriges integriertes Auslandsstudium an der Purdue University, W. Lafayette, Indiana, U.S.A.
5/91 -11/91	Diplomarbeit in der Arbeitsgruppe Digitale Signalverarbeitung von Herrn Prof. Heute am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik an der Ruhr-Universität Bochum
seit 1/92	Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik bei Herrn Prof. G. Schmidt an der Technischen Universität München