

Neue Ergebnisse zur Zustandsschätzung bei simultan auftretenden mengenbasierten und stochastischen Unsicherheiten

Dr.–Ing. Uwe D. Hanebeck, München, und Dr.–Ing. Joachim Horn, München

Zusammenfassung

Behandelt wird der allgemeine Fall der Schätzung des n -dimensionalen Zustands eines linearen dynamischen Systems auf der Grundlage von unsicheren m -dimensionalen Messungen, die simultan unter zwei unterschiedlichen Formen von Unsicherheit leiden. Die erste Unsicherheit ist durch einen stochastischen Prozeß mit bekannter Charakteristik gegeben. Die zweite wird nur durch ihre Wertbegrenzung beschrieben, die Verteilungsdichte ist jedoch unbekannt. Das neue Filter verallgemeinert bekannte Konzepte wie das Kalman-Filter und das mengenbasierte Filter, und umfaßt diese als Grenzfälle.

1. Einleitung

In vielen technischen Systemen kann der, zum Beispiel für Regelungszwecke benötigte, innere Zustand nicht direkt beobachtet werden und muß aus Messungen des Systemausgangs rekonstruiert werden. Dabei treten in der Regel Meßunsicherheiten auf. Üblicherweise wird eine stochastische Beschreibung dieser Unsicherheiten gewählt und ein Kalman-Filter oder eines seiner Derivate [1, 2, 13] zur Zustandsschätzung verwendet.

Bei einigen Typen von Unsicherheiten, wie etwa deterministischen oder systematischen Fehlern, ist jedoch eine stochastische Systembeschreibung nicht sinnvoll. Anstelle von Verteilungsdichtefunktionen können hier eher Schranken für die Fehler angegeben werden. Der Einsatz eines Kalman-Filters bei Vorliegen derartiger Unsicherheiten führt in der Regel nicht zu guten Resultaten. Außerdem liefert das Kalman-Filter auch nicht die für ein solches Unsicherheitsmodell wünschenswerte Worst-Case-Abschätzung für das Ergebnis. Es existieren aber speziell auf diese Art von Unsicherheiten zugeschnittene Zustandsschätzer [15], die sogenannten mengenbasierten Filter, die sich auch im praktischen Einsatz bewährt haben.

Treten nun mengenbasierte und stochastische Unsicherheiten simultan auf, führt die Anwendung sowohl des mengenbasierten Filters als auch des Kalman-Filters im allgemeinen zu keinem sinnvollen Ergebnis. Im Fall des Kalman-Filters müßte die mengenbasierte Unsicherheit durch eine stochastische Unsicherheit approximiert werden, was in den meisten Fällen schwierig ist. Im Fall des mengenbasierten Filters wäre die stochastische Unsicherheit durch Wertbegrenzungen zu beschreiben, was insbesondere bei schwach abklingenden Verteilungsdichtefunktionen zu einer unsinnig konservativen Beschreibung und damit zu unbrauchbaren Ergebnissen führen kann. Benötigt wird also ein mathematisch fundierter Algorithmus zur Zustandsschätzung im Fall simultan auftretender mengenbasierter *und* stochastischer Unsicherheiten.

Ein erstes Verfahren zur optimalen Zustandsschätzung unter mengenbasierten und stochastischen Unsicherheiten wurde in [3, 6] vorgestellt. Es handelt sich dabei um ein numerisches Verfahren für die Schätzung von skalaren Zuständen, welches zwar exakt ist, aber durch seine

hohe Komplexität für die praktische Anwendung nur von begrenztem Wert ist. Für den Fall skalarer Zustände wurde daher in [4, 5] eine effiziente Näherungslösung hergeleitet. Der Fall vektorieller Zustände und skalarer Messungen wird in [8, 9, 10, 11] dargestellt. Eine Verallgemeinerung auf vektorielle Messungen für den Fall, daß Zustandsvektor und Beobachtungsvektor die gleiche Dimension aufweisen, findet sich in [7].

In diesem Beitrag wird der allgemeine Fall der Schätzung von n -dimensionalen Zuständen auf der Basis von m -dimensionalen Messungen behandelt. Dazu wird ein effizienter neuer Filteralgorithmus beschrieben, welcher die beiden klassischen Schätzverfahren — Kalman-Filter und mengenbasiertes Filter — verallgemeinert. Als Ergebnis der Schätzung werden ellipsoide Lösungsmengen möglicher Zustände angegeben, deren Lage im stochastischen Sinne unsicher ist. Die beiden klassischen Filter sind darin als Grenzfälle enthalten, d.h. bei Wegfall einer der beiden Unsicherheitstypen konvergieren die Filtergleichungen entweder gegen das mengenbasierte Filter oder gegen das Kalman-Filter.

In Abschnitt 2 wird zunächst das Schätzproblem beschrieben. Die Grundlagen des neuen Verfahrens werden in Abschnitt 3 dargestellt. Ein effizienter Schätzalgorithmus wird dann in Abschnitt 4 hergeleitet. Dieser Algorithmus wird in Abschnitt 5 auf ein einfaches Simulationsbeispiel angewendet.

2. Problemformulierung

Betrachtet sei eine lineare Meßgleichung gemäß

$$\hat{y} = \mathbf{H} \underline{x} + \underline{e}_y + \underline{c}_y$$

mit m -dimensionalem Meßvektor \hat{y} , n -dimensionalem Zustandsvektor \underline{x} und additiven Unsicherheiten $\underline{e}_y, \underline{c}_y$. Zusätzlich liegt eine a priori Schätzung \hat{x}_p des Zustandsvektors vor. \hat{x}_p leidet ebenfalls unter additiven Unsicherheiten $\underline{e}_p, \underline{c}_p$ gemäß

$$\hat{x}_p = \underline{x} + \underline{e}_p + \underline{c}_p .$$

Die entsprechenden additiven Unsicherheiten sind von unterschiedlichem Typ:

- 1) Bei $\underline{e}_p, \underline{e}_y$ handelt es sich um Unsicherheiten, für die nur Wertbegrenzungen bekannt sind. Diese sind durch

$$\underline{e}_p^T \mathbf{E}_p^{-1} \underline{e}_p \leq 1, \quad \underline{e}_y^T \mathbf{E}_y^{-1} \underline{e}_y \leq 1$$

beschrieben.

- 2) $\underline{c}_p, \underline{c}_y$ sind normalverteilte Zufallsvariablen

$$\underline{c}_p \sim \underline{N}(\underline{0}, \mathbf{C}_p), \quad \underline{c}_y \sim \underline{N}(\underline{0}, \mathbf{C}_y),$$

welche als unkorreliert vorausgesetzt werden.

3. Grundlagen des neuen Verfahrens

Für die weiteren Untersuchungen werden zunächst die Hilfsvariablen

$$\begin{aligned} \bar{x}_p &= \hat{x}_p - \underline{c}_p, \\ \bar{y} &= \hat{y} - \underline{c}_y \end{aligned}$$

eingeführt. Da neben der Wertbegrenztheit der Unsicherheiten $\underline{e}_p, \underline{e}_y$ keine weitere Information vorliegt, ist ein mengenbasiertes Filter [15] das geeignete Werkzeug zur Fusion der Größen \underline{y} und \underline{x}_p . Als Ergebnis der Fusion ergibt sich damit

$$\mathcal{X}_s = \{ \underline{\xi}_s : (\underline{\xi}_s - \underline{\bar{x}}_s)^T \mathbf{E}_s^{-1} (\underline{\xi}_s - \underline{\bar{x}}_s) \leq 1 \}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\bar{x}}_s &= \underline{\bar{x}}_p + \lambda \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T (\mathbf{E}_y + \lambda \mathbf{H} \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T)^{-1} \underline{\eta} , \\ \underline{\eta} &= \underline{\bar{y}} - \mathbf{H} \underline{\bar{x}}_p \end{aligned} \quad (1)$$

und

$$\mathbf{E}_s = d \mathbf{P}_s , \quad (2)$$

wobei d durch

$$d = 1 + \lambda - \lambda \underline{\eta}^T (\mathbf{E}_y + \lambda \mathbf{H} \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T)^{-1} \underline{\eta}$$

und \mathbf{P}_s durch

$$\mathbf{P}_s = \mathbf{E}_p - \lambda \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T (\mathbf{E}_y + \lambda \mathbf{H} \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_p$$

gegeben ist. Die optimale Auswahl des Fusionsparameters $\lambda \in [0, \infty)$ wird im Simulationsbeispiel diskutiert. Gleichung (1) kann abgekürzt als

$$\underline{\bar{x}}_s = \mathbf{W}_x \underline{\bar{x}}_p + \mathbf{W}_y \underline{\bar{y}}$$

mit den Gewichtungsmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_x &= \mathbf{I} - \lambda \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T (\mathbf{E}_y + \lambda \mathbf{H} \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} , \\ \mathbf{W}_y &= \lambda \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T (\mathbf{E}_y + \lambda \mathbf{H} \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T)^{-1} \end{aligned}$$

dargestellt werden, wobei

$$\mathbf{W}_x + \mathbf{W}_y \mathbf{H} = \mathbf{I}$$

gilt. Die Größen $\underline{\bar{x}}_p$ und $\underline{\bar{y}}$ können jedoch nicht direkt gemessen werden, nur die verrauschten Größen $\hat{\underline{x}}_p = \underline{\bar{x}}_p + \underline{c}_p$ und $\hat{\underline{y}} = \underline{\bar{y}} + \underline{c}_y$ sind verfügbar. Damit ist der soeben berechnete Mittelpunkt des Ellipsoids \mathcal{X}_s eine Zufallsvariable, die mit \underline{X}_s bezeichnet wird. Diese ist nur dann definiert, wenn die Differenz $\underline{y} - \mathbf{H} \underline{x}_p$ innerhalb der Minkowski-Summe $\tilde{\mathcal{B}}$ der Mengen liegt, die durch \mathbf{E}_y und $\mathbf{H} \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T$ definiert sind.

Zur Vereinfachung der folgenden Herleitung wird die Abhängigkeit der wertbegrenzten Unsicherheit \mathbf{E}_s gemäß (2) von $\underline{\bar{y}}$ und $\underline{\bar{x}}_p$ eliminiert, indem $\underline{\eta} = \underline{0}$ gesetzt wird, was zu $d = 1 + \lambda$ und damit zu einer konservativen Abschätzung von \mathbf{E}_s gemäß

$$\mathbf{E}_s = (1 + \lambda) \mathbf{E}_p - \lambda (1 + \lambda) \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T (\mathbf{E}_y + \lambda \mathbf{H} \mathbf{E}_p \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}_p \quad (3)$$

führt. Damit ist \mathbf{E}_s keine Zufallsvariable mehr.

4. Herleitung eines effizienten Schätzalgorithmus

Da die Menge $\tilde{\mathcal{B}}$ kein Ellipsoid ist, kann zur Vereinfachung ein Hüllellipsoid

$$\mathcal{B} = \{\underline{z} : \underline{z}^T \mathbf{B}^{-1} \underline{z} \leq 1\}$$

verwendet werden, so daß

$$\underline{y} - \mathbf{H}\underline{x}_p \in \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$$

gilt. Eine parametrisierte Familie von Hüllellipsoiden erhält man durch

$$\mathbf{B} = \frac{1}{0.5 - \kappa} \mathbf{E}_y + \frac{1}{0.5 + \kappa} \mathbf{H}\mathbf{E}_p\mathbf{H}^T$$

für $\kappa \in (-0.5, 0.5)$. κ wird so bestimmt, daß das Volumen des resultierenden Hüllellipsoids minimal wird. Damit ist die Zufallsvariable \underline{X}_s durch

$$\underline{X}_s = \begin{cases} \mathbf{W}_x \underline{X}_p + \mathbf{W}_y \underline{Y} & \text{für } \underline{y} - \mathbf{H}\underline{x}_p \in \mathcal{B} \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Die gesuchte Dichte \underline{X}_s ist somit durch

$$f_{\underline{x}_s}(\underline{x}_s) = \frac{1}{|\mathbf{W}_x|} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{py}(\mathbf{W}_x^{-1}(\underline{x}_s - \mathbf{W}_y \underline{y}), \underline{y}) d\underline{y} \quad (4)$$

definiert [14], wobei die Gewichtungsmatrix \mathbf{W}_x als regulär vorausgesetzt wird und $f_{py}(\underline{x}_p, \underline{y})$ gemäß

$$f_{py}(\underline{x}_p, \underline{y}) = \begin{cases} c_{py} f_p(\underline{x}_p) f_y(\underline{y}) & \underline{y} - \mathbf{H}\underline{x}_p \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

definiert wird. c_{py} ist eine Normalisierungskonstante. Unter Verwendung der Indikatorfunktion

$$I(\underline{x}_p, \underline{y}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \underline{y} - \mathbf{H}\underline{x}_p \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

kann (5) in die kompaktere Form

$$f_{py}(\underline{x}_p, \underline{y}) = c_{py} f_p(\underline{x}_p) f_y(\underline{y}) I(\underline{x}_p, \underline{y})$$

überführt werden. Um eine Lösung für die gesuchte Dichte zu bestimmen, wird die Indikatorfunktion $I(\underline{x}_p, \underline{y})$ durch eine gewichtete Summe von Gaußglocken

$$I(\underline{x}_p, \underline{y}) \approx \sum_{i=1}^L \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \mathbf{H}\underline{x}_p - \underline{m}_g^i)^T \mathbf{C}_g^{-1} (\underline{y} - \mathbf{H}\underline{x}_p - \underline{m}_g^i) \right\}$$

approximiert. Die Gaußglocken werden durch unterschiedliche Zentren \underline{m}_g^i und identische symmetrische und positiv definite Matrizen \mathbf{C}_g definiert.

Mit dieser Approximation der Indikatorfunktion $I(\underline{x}_p, \underline{y})$ kann nun die gesuchte Dichte $f_{\underline{x}_s}$ nach (4) durch eine Summe einfacher Dichten approximiert werden. Betrachten wir zunächst einen Term dieser Summe

$$f_{\underline{x}_s}^i(\underline{x}_s) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(\underline{x}_p - \hat{\underline{x}}_p)^T \mathbf{C}_p^{-1} (\underline{x}_p - \hat{\underline{x}}_p) + (\underline{y} - \hat{\underline{y}})^T \mathbf{C}_y^{-1} (\underline{y} - \hat{\underline{y}}) + (\underline{y} - \mathbf{H}\underline{x}_p - \underline{m}_g^i)^T \mathbf{C}_g^{-1} (\underline{y} - \mathbf{H}\underline{x}_p - \underline{m}_g^i) \right] \right\} d\underline{y}$$

für $i = 1, \dots, L$, $\underline{x}_p = \mathbf{W}_x^{-1} [\underline{x}_s - \mathbf{W}_y \underline{y}]$ und der Normalisierungskonstanten c_1 , so ergibt sich nach langer Rechnung

$$f_{\underline{x}_s}^i(\underline{x}_s) = g_i c_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x}_s - \hat{\underline{x}}_s^i)^T (\mathbf{C}_s^i)^{-1} (\underline{x}_s - \hat{\underline{x}}_s^i) \right\}$$

mit dem zugehörigen Gewichtungsfaktor

$$g_i = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\hat{\underline{y}} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}}_p - \underline{m}_g^i)^T (\mathbf{H}\mathbf{C}_p\mathbf{H}^T + \mathbf{C}_y + \mathbf{C}_g)^{-1} (\hat{\underline{y}} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}}_p - \underline{m}_g^i) \right\},$$

der Normalisierungskonstanten c_2 und dem Erwartungswert

$$\hat{\underline{x}}_s^i = \mathbf{W}_x \hat{\underline{x}}_p + \mathbf{W}_y \hat{\underline{y}} + (\mathbf{W}_x \mathbf{C}_p \mathbf{H}^T - \mathbf{W}_y \mathbf{C}_y) (\mathbf{H}\mathbf{C}_p\mathbf{H}^T + \mathbf{C}_y + \mathbf{C}_g)^{-1} (\hat{\underline{y}} - \mathbf{H}\hat{\underline{x}}_p - \underline{m}_g^i)$$

für $i = 1, \dots, L$. Die Kovarianzmatrizen sind für alle Einzeldichten identisch und durch

$$\mathbf{C}_s^i = \mathbf{W}_x \mathbf{C}_p \mathbf{W}_x^T + \mathbf{W}_y \mathbf{C}_y \mathbf{W}_y^T - (\mathbf{W}_x \mathbf{C}_p \mathbf{H}^T - \mathbf{W}_y \mathbf{C}_y) (\mathbf{H}\mathbf{C}_p\mathbf{H}^T + \mathbf{C}_y + \mathbf{C}_g)^{-1} (\mathbf{W}_x \mathbf{C}_p \mathbf{H}^T - \mathbf{W}_y \mathbf{C}_y)^T$$

gegeben. Die Gesamtdichte $f_{\underline{x}_s}$ ergibt sich zu

$$f_{\underline{x}_s}(\underline{x}_s) \approx \sum_{i=1}^L f_{\underline{x}_s}^i(\underline{x}_s), \quad (6)$$

ist also eine gewichtete Summe von Gaußdichten, wobei die Gewichtungen g_i ihrerseits wieder Werte aus einer Gaußfunktion annehmen.

Sind als Kenngrößen von \underline{X}_s lediglich Momente bis zweiter Ordnung, d.h. Erwartungswert und Kovarianzmatrix, gesucht, so können diese sehr einfach aus der angegebenen Dichte bestimmt werden.

Für den Erwartungswert $\hat{\underline{x}}_s = E[\underline{X}_s]$ erhält man

$$\hat{\underline{x}}_s \approx \left(\sum_{i=1}^L g_i \hat{\underline{x}}_s^i \right) / \left(\sum_{i=1}^L g_i \right), \quad (7)$$

für die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_s \approx \frac{\sum_{i=1}^L g_i \{ \mathbf{C}_s^i + \hat{\underline{x}}_s^i (\hat{\underline{x}}_s^i)^T \}}{\sum_{i=1}^L g_i} - \hat{\underline{x}}_s \hat{\underline{x}}_s^T. \quad (8)$$

Das Schätzergebnis ist also eine ellipsoide Menge, deren Ausrichtung und Größe durch (3) gegeben ist. Der Mittelpunkt dieser Menge ist eine Zufallsvariable mit Verteilungsdichte gemäß (6). Ist eine Beschreibung des Mittelpunkts durch Momente bis zweiter Ordnung gewünscht, so sind Erwartungswert und Kovarianzmatrix durch (7) bzw. (8) gegeben.

Der neue Schätzer enthält die beiden klassischen Filter — Kalman–Filter und mengenbasiertes Filter — als Grenzfälle, d.h. bei Wegfall einer der beiden Unsicherheitstypen konvergieren die Filtergleichungen entweder gegen das Kalman–Filter oder gegen das mengenbasierte Filter.

5. Simulationsbeispiel

Betrachtet werden zwei Meßgleichungen

$$\begin{aligned} y_1^k &= \mathbf{H}_1 \underline{x} + \underline{e}_1^k + \underline{c}_1^k, \\ y_2^k &= \mathbf{H}_2 \underline{x} + \underline{e}_2^k + \underline{c}_2^k \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei ein konstanter Zustand $\underline{x} = [100 \quad 100]^T$ angenommen wird. $\underline{e}_1^k, \underline{e}_2^k$ sind wertbegrenzte Fehler, deren Begrenzung durch

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 36900 & 24300 \\ 24300 & 16200 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1200 & 0 \\ 0 & 1200 \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Für diese Simulation werden konstante Fehler $\underline{e}_1^k = [20 \quad 10]^T, \underline{e}_2^k = [5 \quad 25]^T$ verwendet, die dem Schätzalgorithmus selbstverständlich nicht bekannt sind. $\underline{c}_1^k, \underline{c}_2^k$ sind weiße, normalverteilte, voneinander unabhängige Zufallsprozesse mit Kovarianzmatrizen

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 100^2 & 0 \\ 0 & 100^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 100^2 & 0 \\ 0 & 100^2 \end{bmatrix}$$

und Mittelwert Null. Es ist kein Anfangsschätzwert für den gesuchten Zustand \underline{x} bekannt.

Bei Anwendung des neuen Filters werden die Berechnungsvorschriften für den Schätzwert $\hat{\underline{x}}_s^k$ gemäß (7), die Wertbegrenzung \mathbf{E}_s^k gemäß (3) und die Kovarianzmatrix \mathbf{C}_s^k gemäß (8) zu jedem Zeitschritt k auf beide Meßgleichungen angewendet. Der Fusionsparameter λ_k wird dabei so gewählt, daß $\det(\mathbf{E}_s^k + \mathbf{C}_s^k)$ minimiert wird. Die Abbildung 1 zeigt die Entwicklung der Konfidenzmenge der Schätzung über der Zeit, wobei die Konfidenzmenge als Minkowski–Summe von \mathbf{E}_s^k und $9 \mathbf{C}_s^k$, zentriert um $\hat{\underline{x}}_s^k$, gegeben ist. Der wahre Wert ist durch einen Punkt gekennzeichnet. Die optimale Schätzung für eine unendliche Anzahl von Messungen wäre die Schnittmenge der beiden Ellipsen, die die Wertbegrenzungen der Fehler $\underline{e}_1^k, \underline{e}_2^k$ der Einzelmessungen repräsentieren. Man beachte, daß die Konfidenzmenge für $k \rightarrow \infty$ eine äußere Hülle für diese Schnittmenge bildet und damit auch den wahren Wert enthält.

6. Schlußfolgerung

Bei vielen Problemen der Zustandsschätzung ist es erforderlich, simultan auftretende stochastische und mengenbasierte Unsicherheiten zu berücksichtigen, was aber mit den klassischen Schätzverfahren wie dem Kalman–Filter oder dem mengenbasierten Filter nicht möglich ist.

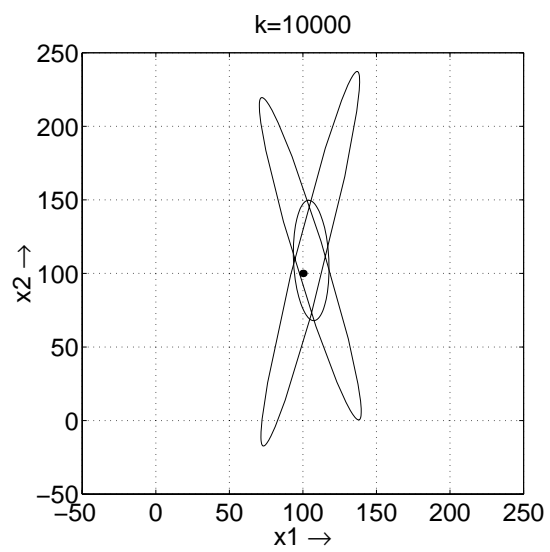
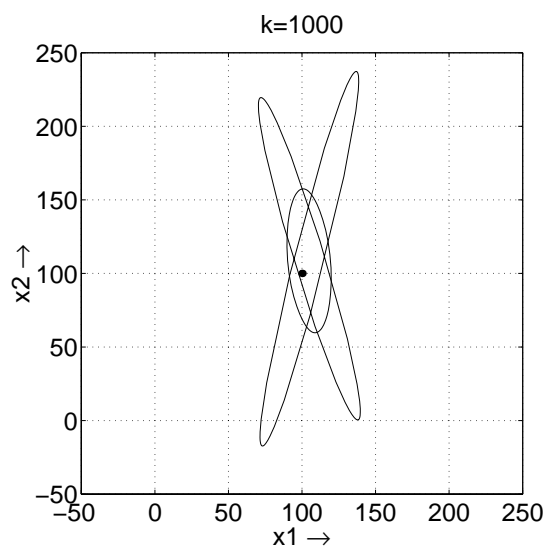
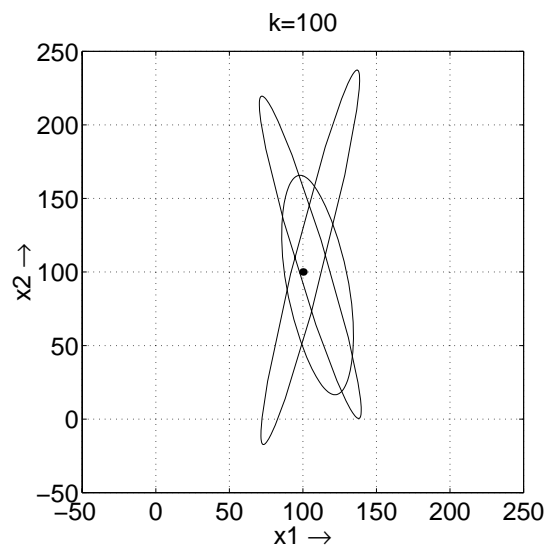
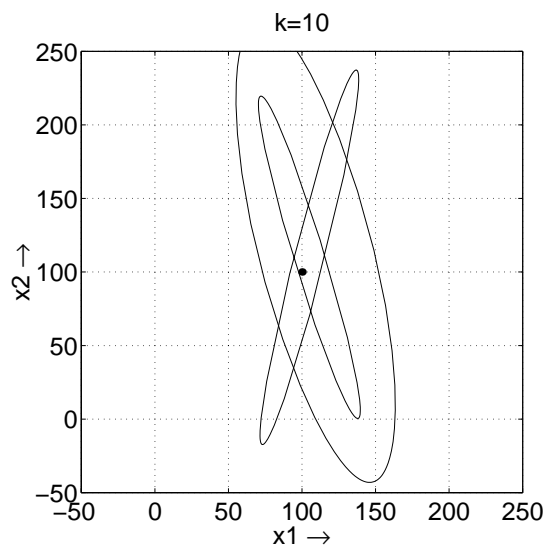
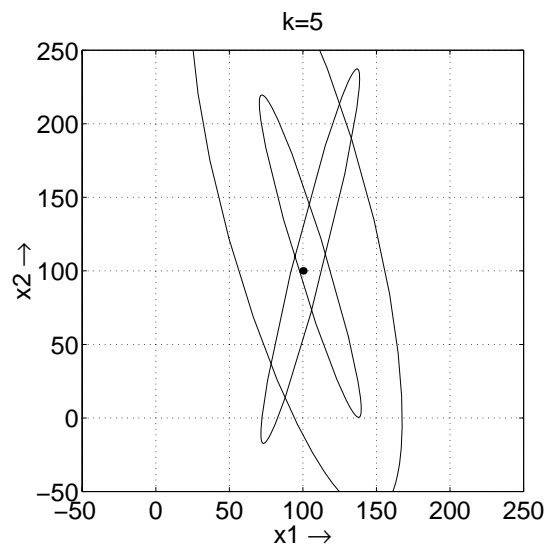
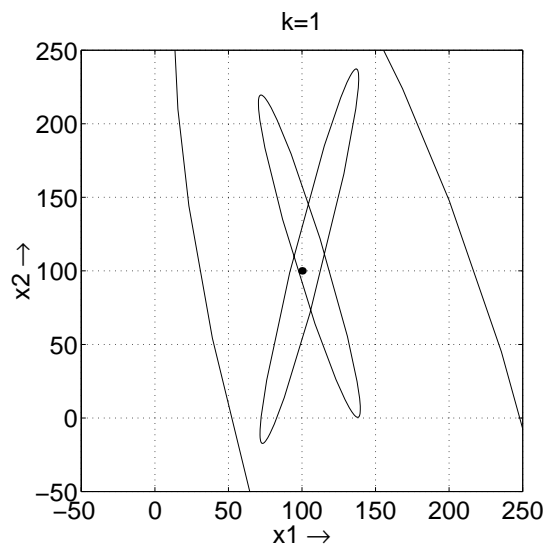


Abbildung 1: Schätzergebnis bei Anwendung des neuen Filters.

Deshalb werden häufig heuristische Verfahren eingesetzt. Zur mathematisch korrekten Behandlung der Zustandsschätzung im Fall simultan auftretender mengenbasierter und stochastischer Unsicherheiten wurde daher ein neuartiger Filteralgorithmus entwickelt.

In dem vorliegenden Beitrag wurde der Filterschritt, d.h. die Verbesserung einer vorliegenden Schätzung auf der Grundlage einer Messung, betrachtet. Der Prädiktionsschritt zur Fortschreibung einer Schätzung mit Hilfe des dynamischen Systemmodells wird in [11] behandelt.

Literatur

- [1] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice–Hall, 1979.
- [2] K. Brammer, G. Siffing, *Kalman–Bucy–Filter*, 2. Auflage, Oldenbourg, 1985.
- [3] U. D. Hanebeck, J. Horn, G. Schmidt, “On Combining Set Theoretic and Bayesian Estimation”, *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA’96)*, Minneapolis, Minnesota, USA, April 1996, S. 3081–3086.
- [4] U. D. Hanebeck, J. Horn, “A New State Estimator for a Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainty Model”, *Proceedings of SPIE Vol. 3720, AeroSense Symposium*, Orlando, Florida, USA, April 1999, S. 336–344.
- [5] U. D. Hanebeck, J. Horn, “A New Estimator for Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainty Models Applied to Mobile Robot Localization”, *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA’99)*, Detroit, Michigan, USA, Mai 1999, S. 1335–1340.
- [6] U. D. Hanebeck, J. Horn, G. Schmidt, “On Combining Statistical and Set–Theoretic Estimation”, *Automatica*, Band 35, Heft 6, 1999, S. 1101–1109.
- [7] U. D. Hanebeck, J. Horn, “New Estimators for Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainty Models: The Vector Case”, *Proceedings of the Fifth European Control Conference (ECC’99)*, Karlsruhe, August/September 1999.
- [8] U. D. Hanebeck, J. Horn, “New Results for State Estimation in the Presence of Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainties”, *Proceedings of the 1999 IEEE Systems, Man, and Cybernetics Conference (SMC’99)*, Tokyo, Japan, Oktober 1999.
- [9] U. D. Hanebeck, J. Horn, “New Estimators for Mixed Stochastic and Set Theoretic Uncertainty Models: The Scalar Measurement Case”, *Proceedings of the 1999 IEEE Conference on Decision and Control (CDC’99)*, Phoenix, Arizona, USA, Dezember 1999, S. 1934–1939.
- [10] U. D. Hanebeck, J. Horn, “Fusing Information Simultaneously Corrupted by Uncertainties with Known Bounds and Random Noise with Known Distribution”, *Information Fusion*, Band 1, Heft 1, Juli 2000, S. 55–63.
- [11] U. D. Hanebeck, J. Horn, “Zustandsschätzung im Fall simultan auftretender mengenbasierter und stochastischer Unsicherheiten”, *Automatisierungstechnik*, Band 48, Heft 6, 2000, S. 265–272.
- [12] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, “A Non–Divergent Estimation Algorithm in the Presence of Unknown Correlations”, *Proceedings of the 1997 American Control Conference (ACC’97)*, Albuquerque, New Mexico, USA, Juni 1997, S. 2369–2373.
- [13] V. Krebs, *Nichtlineare Filterung*, Oldenbourg, 1980.
- [14] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Second Edition, McGraw–Hill Book Company, 1984.
- [15] F. C. Schweppe, *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice–Hall, 1973.