

Systematische Beschreibung von Unsicherheiten in der Informationsfusion mit Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten

Benjamin Noack, Vesa Klumpp, Daniel Lyons und Uwe D. Hanebeck

Lehrstuhl für Intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS),
Institut für Anthropomatik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT),
<http://isas.uka.de>

Zusammenfassung Die systematische Behandlung von Unsicherheiten stellt eine wesentliche Herausforderung in der Informationsfusion dar. Einerseits müssen geeignete Darstellungsformen für die Unsicherheiten bestimmt werden und andererseits darauf aufbauend effiziente Schätzverfahren hergeleitet werden. Im Allgemeinen wird zwischen stochastischen und mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibungen unterschieden. Dieser Beitrag stellt ein Verfahren zur Zustandsschätzung vor, welches simultan stochastische und mengenbasierte Fehlergrößen berücksichtigen kann, indem unsichere Größen nicht mehr durch eine einzelne Wahrscheinlichkeitsdichte, sondern durch eine Menge von Dichten repräsentiert werden. Besonderes Augenmerk liegt hier auf den Vorteilen und Anwendungsmöglichkeiten dieser Unsicherheitsbeschreibung.

1 Einleitung

Ein zentrales Einsatzgebiet verteilter Sensorsysteme ist die Überwachung und Vermessung weiträumiger Phänomene, z.B. zur Bestimmung von Schadstoffverteilungen im Grundwasser, zur Überwachung seismischer Aktivitäten oder zur Messung von Temperaturverteilungen. Aus einer Vielzahl von Messungen, welche im Allgemeinen fehlerbehaftet sind, soll sich schließlich ein Gesamtbild des Phänomens ergeben. Eine wesentliche Herausforderung dabei stellt die Entwicklung effizienter Methoden zur Informationsfusion unter Berücksichtigung auftretender Unsicherheiten dar. Die stochastische Modellierung unsicherer Größen ist eine weit-

verbreitete Herangehensweise. Hierfür kommen im Allgemeinen rekursive bayessche Schätzverfahren, wie das Kalman-Filter [1] oder Partikel-Filtermethoden [2], zum Einsatz. Allerdings stützen sich diese Verfahren auf die Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Fehlergrößen bekannt sind. Werden hier falsche Annahmen getroffen, sind inkonsistente Schätzergebnisse zu erwarten. Eine andere Art der Unsicherheitsbeschreibung ist die Verwendung von Mengen zur Fehlereingrenzung [3,4]. Sie eignet sich für die Betrachtung amplitudenbegrenzter Fehler. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht in der Bestimmung sicherer Fehlergrenzen. Die Behandlung von Ausreißern gestaltet sich dadurch jedoch als schwierig.

In dieser Arbeit wird zunächst ein Schätzverfahren zur simultanen Berücksichtigung stochastischer und mengenbasierter Unsicherheiten vorgestellt. Ein solches Verfahren ermöglicht eine differenzierte, systematische Modellierung von Fehlereinflüssen. Das wesentliche Ziel der Arbeit ist es, die Vorteile und Anwendungsmöglichkeiten, die durch den Einsatz solcher Verfahren entstehen, zu beschreiben. Es werden Fälle aufgezeigt, in denen Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten besondere Vorteile bieten, wie bei der Abschätzung von Linearisierungsfehlern oder der Verarbeitung komplizierter Wahrscheinlichkeitsdichten.

2 Schätzverfahren unter Berücksichtigung stochastischer und mengenbasierter Unsicherheiten

Methoden zur Überwachung und Vermessung räumlich verteilter, dynamischer Phänomene – wie sie z.B. in [5] vorgestellt werden – nutzen physikalisches Hintergrundwissen über die räumliche und zeitliche Entwicklung, um einerseits das Phänomen auch an Nichtmesspunkten zu charakterisieren sowie andererseits den aktuellen Zustand zum nächsten Messzeitpunkt zu präzisieren. Prädierte Zustandsinformationen können dann mit Messungen fusioniert werden. Im Allgemeinen lässt sich die Zustandsentwicklung durch ein System partieller Differentialgleichungen beschreiben. Dieses kann dann durch eine Orts- und Zeitdiskretisierung in ein Systemmodell

$$\underline{\mathbf{x}}_{k+1} = \underline{\mathbf{a}}_k(\underline{\mathbf{x}}_k, \hat{\underline{\mathbf{u}}}_k, \underline{\mathbf{w}}_k, \underline{\mathbf{d}}_k) \quad (14.1)$$

überführt werden. Die Funktion \underline{a}_k bildet den Zustand \underline{x}_k zum Zeitpunkt k auf den Folgezustand \underline{x}_{k+1} ab. Stochastische Unsicherheiten werden hierbei in der Zufallsgröße \underline{w}_k zusammengefasst, welche durch die Wahrscheinlichkeitsdichte f_k^w charakterisiert ist. Systematische Unsicherheiten werden durch den unbekannten, aber begrenzten Fehlerterm $\underline{d}_k \in \mathcal{D}_k \subset \mathbb{R}^n$ in die Abbildung einbezogen. Der Vektor \underline{u}_k bezeichnet die konkrete Eingangs- bzw. Stellgröße. Entsprechend werden in dem Messmodell

$$\hat{y}_k = \underline{h}_k(\underline{x}_k, \underline{v}_k, \underline{e}_k) \quad (14.2)$$

jedes einzelnen Sensors stochastische Störeinflüsse durch \underline{v}_k und unbekannte, aber begrenzte Fehlergrößen durch $\underline{e}_k \in \mathcal{E}_k \subset \mathbb{R}^n$ notiert. \hat{y}_k ist dann die konkrete Messgröße.

Stochastische und mengenbasierte Fehlerbeschreibungen sollen simultan in einem Verfahren zur Schätzung des Systemzustands \underline{x}_k berücksichtigt werden. Ein Verfahren, das die kombinierte Behandlung beider Fehlerarten erlaubt, ist das SSI-Filter (*Statistical and Set-theoretic Information Filter* [6]). Dieses Filter wurde speziell dazu entwickelt, um bei der Informationsfusion Abhängigkeitsstrukturen zwischen den mengenbasierten Unsicherheiten auszunutzen. Da in dieser Arbeit die Größen $\underline{d}_k \in \mathcal{D}_k$ und $\underline{e}_k \in \mathcal{E}_k$ Unwissen über Fehlereinflüsse darstellen, ist das Ausnutzen von Abhängigkeiten, da unbekannt, hier nicht möglich. Für diese Situation lässt sich mit Hilfe einer Verallgemeinerung klassischer Wahrscheinlichkeitstheorie das im folgenden Abschnitt beschriebene Verfahren entwickeln.

2.1 Zustandsschätzung mit Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten

Die Beziehung des aktuellen Zustands zum Folgezustand, gegeben durch das Systemmodell (14.1), lässt sich auch durch die Transitionsdichte

$$f_k^T(\underline{x}_{k+1} | \underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{d}_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\underline{x}_{k+1} - \underline{a}_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{w}_k, \underline{d}_k)) f_k^w(\underline{w}_k) d\underline{w}_k$$

beschreiben, wobei δ die n -dimensionale Dirac-Delta-Distribution bezeichnet. Aufgrund des unbekannten, aber begrenzten Parameters $\underline{d}_k \in \mathcal{D}_k$ kann der Zustandsübergang nicht durch eine eindeutige Transitionsdichte charakterisiert werden. Vielmehr parametrisiert \underline{d}_k eine Menge

$$\mathcal{F}_k^T = \{ f_k^T(\underline{x}_{k+1} | \underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{d}_k) \mid \underline{d}_k \in \mathcal{D}_k \}$$

möglicher Transitionsdichten. Jedes Element dieser Menge kann offensichtlich die „richtige“ Transitionsdichte darstellen. Folglich wird das Chapman-Kolmogorow-Integral

$$f_{k+1}^p(\underline{x}_{k+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k^T(\underline{x}_{k+1} | \underline{x}_k, \hat{\underline{u}}_k, \underline{d}_k) f_k^e(\underline{x}_k) d\underline{x}_k$$

zur Berechnung der prädierten Wahrscheinlichkeitsdichte von \underline{x}_{k+1} für jedes Element in \mathcal{F}_k^T ausgewertet. Dadurch ergibt sich eine Menge prädizierter Dichten \mathcal{F}_{k+1}^p für den Zustand \underline{x}_{k+1} .

Entsprechend führt die Likelihood

$$f(\hat{\underline{y}}_k | \underline{x}_k, \underline{e}_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\hat{\underline{y}}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k, \underline{v}_k, \underline{e}_k)) f_k^v(\underline{v}_k) d\underline{v}_k,$$

die sich aus der Messgleichung (14.2) ergibt, aufgrund des unbekannten, begrenzten Fehlers \underline{e}_k zu einer Menge

$$\mathcal{F}_k^L = \left\{ f(\hat{\underline{y}}_k | \cdot, \underline{e}_k) \mid \underline{e}_k \in \mathcal{E}_k \right\}$$

möglicher Likelihoods. Der bayessche Filterschritt wird dann elementweise für die Menge \mathcal{F}_k^p prädizierter bzw. priorer Dichten und die Menge \mathcal{F}_k^L der Likelihoods durchgeführt und ergibt die Menge

$$\mathcal{F}_k^e = \left\{ f_k^e \mid f_k^e(\underline{x}_k) = \frac{f_k^p(\underline{x}_k) \cdot f_k^L(\underline{x}_k)}{\int_{\Omega} f_k^p(\underline{x}) \cdot f_k^L(\underline{x}) d\underline{x}} \right. \\ \left. \text{für alle } \underline{x}_k \in \Omega, f_k^L \in \mathcal{F}_k^L, f_k^p \in \mathcal{F}_k^p \right\}$$

geschätzter Wahrscheinlichkeitsdichten für den Zustand \underline{x}_k , wie in Abb. 14.1 veranschaulicht.

Insgesamt beruht dieses Verfahren auf einem allgemeineren Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Charakterisierung der stochastischen Größe \underline{x}_k wird nicht mehr als eindeutig angenommen, sondern durch eine Menge von Wahrscheinlichkeitsdichten beschrieben.

2.2 Konvexität und Intervallwahrscheinlichkeit

Eine konvexe, abgeschlossene Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. -dichten, welche eine Zufallsgröße charakterisiert, heißt *Credal*

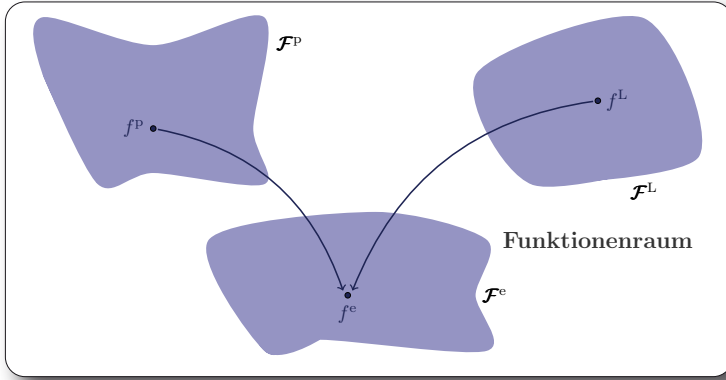


Abbildung 14.1: Elementweise Verarbeitung der Dichten.

State [7, 8]. In der Theorie der Intervallwahrscheinlichkeit [9, 10] werden diese Mengen auch *Struktur* genannt. Die Funktionenmengen im vorigen Abschnitt sind zwar im Allgemeinen nicht konvex, sie beschreiben jedoch die gleichen Intervalle von Wahrscheinlichkeiten für jedes Ereignis wie ihr konvexer Abschluss. D.h., eine derartige Menge \mathcal{F} , auch *Vorstruktur* oder *erzeugende Menge* genannt, und ihr konvexer Abschluss $\text{clos}\{\text{conv}\{\mathcal{F}\}\}$ ergeben die gleiche Wahrscheinlichkeitsbewertung. Genauere Untersuchungen zu Schätzverfahren mit Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten und zur Konvexität sind in [11] dargelegt.

3 Kalman-Filter für ellipsoidale Mengen

Ein weitbekanntes bayessches Schätzverfahren ist das Kalman-Filter [1], welches lineare System- und Messmodelle betrachtet. Zudem werden die Rauschgrößen \underline{w}_k und \underline{v}_k als unabhängig voneinander angenommen. Im Falle von Normalverteilungen kann die Zustandsschätzung dann eindeutig durch Erwartungswert $\hat{\underline{x}} \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beschrieben werden. Um unbekannte, aber begrenzte Unsicherheiten einzubeziehen, wird das lineare Systemmodell

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k (\hat{\underline{u}}_k + \underline{w}_k + \underline{d}_k)$$

um die Fehlergröße \underline{d}_k und das Messmodell

$$\hat{\underline{y}}_k = \mathbf{H}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k + \underline{e}_k$$

um \underline{e}_k erweitert, welche sowohl voneinander als auch von \underline{w}_k und \underline{v}_k unabhängig sind. Folglich beeinflussen die mengenbasierten Fehler nur den Schätzwert, nicht aber die Berechnung der Kovarianzmatrix. Als eine besonders geeignete Darstellungsform dieser Fehlergrößen erweisen sich ellipsoidale Mengen. Jede Größe kann dann durch eine Menge

$$\mathcal{E}(\hat{\underline{c}}, \mathbf{X}) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\underline{x} - \hat{\underline{c}})^T \mathbf{X}^{-1} (\underline{x} - \hat{\underline{c}}) \leq 1 \}$$

mit Mittelpunkt $\hat{\underline{c}}$ und nichtnegativ definiter Matrix \mathbf{X} repräsentiert werden, d.h. $\underline{d}_k \in \mathcal{E}(\underline{0}, \mathbf{U}_k)$ und $\underline{e}_k \in \mathcal{E}(\underline{0}, \mathbf{Y}_k)$. Ebenso wird der Zustand durch ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\hat{\underline{c}}_k, \mathbf{X}_k)$ beschrieben. Durch diese Mengendarstellung gestaltet es sich einfach, affine Transformationen

$$\mathbf{A}\mathcal{E}(\hat{\underline{c}}, \mathbf{X}) + \underline{b} = \mathcal{E}(\mathbf{A}\hat{\underline{c}} + \underline{b}, \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^T) \quad (14.3)$$

zu berechnen. Die Berechnung einer Minkowski-Summe, der elementweisen Addition zweier Ellipsoide, ergibt im Allgemeinen kein Ellipsoid mehr, allerdings lässt sich durch

$$\mathcal{E}(\hat{\underline{c}}_1, \mathbf{X}_1) \oplus \mathcal{E}(\hat{\underline{c}}_2, \mathbf{X}_2) \subseteq \mathcal{E}(\hat{\underline{c}}_1 + \hat{\underline{c}}_2, \mathbf{X}(p))$$

mit

$$\mathbf{X}(p) = (1 + p^{-1})\mathbf{X}_1 + (1 + p)\mathbf{X}_2, \quad p > 0 \quad (14.4)$$

leicht eine äußere Approximation in Form eines Ellipsoids berechnen. Der Parameter p kann so bestimmt werden, dass das Volumen oder die Länge der Halbachsen der äußeren Approximation minimal ist [4]. Mittels der Gleichungen (14.3) und (14.4) lässt sich nun ein verallgemeinertes Kalman-Filter für ellipsoidale Mengen herleiten. Die resultierenden Berechnungsschritte sind in Abb. 14.2 zusammengefasst. Die genaue Herleitung des Verfahrens wird in [12] beschrieben. Offensichtlich lassen sich die Mittelpunkte $\hat{\underline{c}}_k^p$ und $\hat{\underline{c}}_k^e$ im Prädiktions- bzw. Filterschritt durch die bekannten Berechnungsvorschriften bestimmen. Der Unterschied dieses neuen Verfahrens zum Standard-Kalman-Filter besteht in der zusätzlichen Berechnung der Matrizen \mathbf{X}_k^p bzw. \mathbf{X}_k^e . Schließlich wird

der unbekannte, aber amplitudenbegrenzte Fehlereinfluss also durch \mathbf{X}_k^p bzw. \mathbf{X}_k^e und die stochastische Unsicherheit durch \mathbf{C}_k^p bzw. \mathbf{C}_k^e charakterisiert.

Die Menge von Erwartungswerten $\mathcal{E}(\hat{\mathbf{c}}_k^p, \mathbf{X}_k^p)$ bzw. $\mathcal{E}(\hat{\mathbf{c}}_k^e, \mathbf{X}_k^e)$ mit der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_k^p bzw. \mathbf{C}_k^e beschreibt eine Menge von verschobenen Gaußdichten. Es handelt sich also um ein Schätzverfahren mit Mengen von Dichten, wie in Abschnitt 2 dargelegt.

4 Systematische Beschreibung von Unsicherheiten durch Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten

Mit Hilfe der vorgestellten Verallgemeinerung rein stochastischer Schätzverfahren ist es möglich, Störeinflüsse bei der Systemmodellierung differenzierter zu betrachten. Unsicherheiten, deren Statistik unbekannt ist oder die sich gar nicht stochastisch charakterisieren lassen, können nun systematisch berücksichtigt werden. In diesem Abschnitt sei ein Überblick über Situationen gegeben, in denen sich eine Unterscheidung zwischen stochastischen und mengenbasierten Fehlern als sinnvoll erweist.

4.1 Berücksichtigung von systematischen Fehlern

Systematische Fehler beschreiben Störungen und Unsicherheiten, die nicht durch wiederholte Beobachtung im Mittel verschwinden. Beispiele für solche Fehler sind Fehler im Sensor, wie fehlerhafte Kalibrierung, Defekte, Fehler des Agenten, wie falsches Ablesen der Messinstrumente, Fehlinterpretation der Ergebnisse, unbekannte Störungen oder unvollständiges a-priori-Wissen. Diese Fehlereinflüsse lassen sich nicht durch mehrmaliges Messen eliminieren und bleiben somit als Abweichung im Schätzergebnis bestehen. Es handelt sich also um unbekannte, aber im Allgemeinen begrenzte Störeinflüsse, daher bieten sich Mengen zur Beschreibung dieser Fehler an.

Bei Verwendung rein stochastischer Modelle wird jedoch häufig versucht, einen solchen Fehler mitzuschätzen. Zum einen bedeutet dies, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den systematischen Fehler angenommen werden muss, und zum anderen führt dies oft zu einem erheblich höheren Rechenaufwand, da z.B. lineare Modelle nichtlinear werden

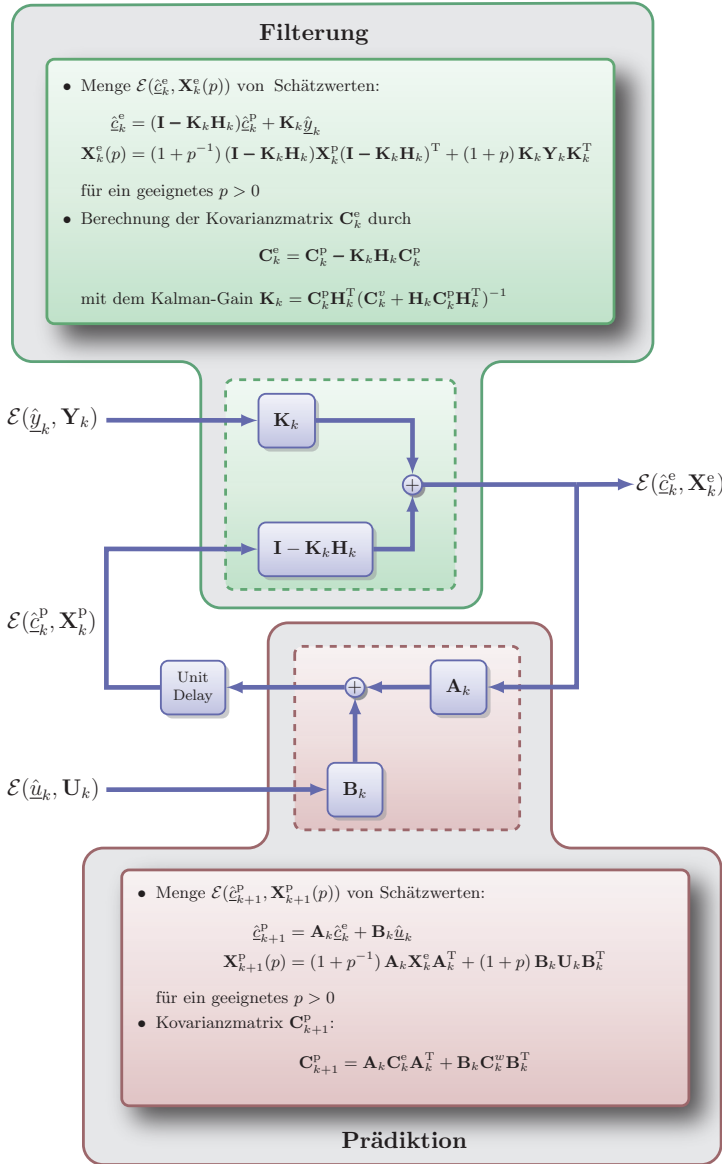


Abbildung 14.2: Schema des Kalman-Filters für ellipsoidale Mengen von Erwartungswerten.

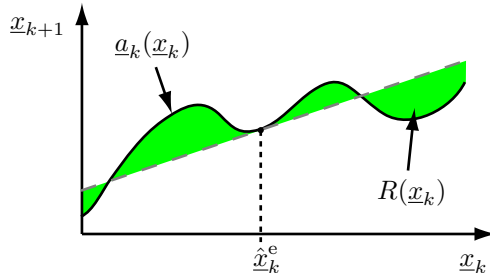


Abbildung 14.3: Approximation durch Taylorreihen-Approximation erster Ordnung am Schätzwert \hat{x}_k^e .

können. Naheliegender ist es daher, im System- und Messmodell zwischen stochastischen und systematischen Fehlertermen zu unterscheiden. Mit den in den vorigen Abschnitten beschriebenen Schätzverfahren können beide Fehlerarten nun simultan behandelt werden.

4.2 Abschätzung von Linearisierungsfehlern

Bei nichtlinearen System- und Messabbildungen wird häufig das Erweiterte Kalman-Filter (EKF) eingesetzt. Hierbei werden das System- und Messmodell um den prädizierten bzw. geschätzten Zustand linearisiert. Das EKF verwendet eine Taylorreihen-Entwicklung

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{a}_k(\underline{x}_k) + \underline{w}_k = \underline{a}_k(\hat{x}_k^e) + \left. \frac{\partial \underline{a}_k}{\partial \underline{x}_k} \right|_{\underline{x}_k = \hat{x}_k^e} (\underline{x}_k - \hat{x}_k^e) + R(\underline{x}_k) + \underline{w}_k$$

der Abbildungen, wobei das Restglied $R(\underline{x}_k)$, der grün markierte Bereich in Abb. 14.3, vernachlässigt wird. Deshalb kann das EKF bei starken Nichtlinearitäten schlechte bzw. inkonsistente Ergebnisse liefern [13]. In der Regel führt dies zu einem Bias der Schätzungen, d.h. zu einem systematischen Fehler.

Um diesen Linearisierungsfehler zu berücksichtigen, kann eine systematische Abschätzung des Restgliedterms vorgenommen werden. Betrachtet man einen Konfidenzbereich der Schätzung, z.B. die 3σ -Grenze, so lässt sich das Restglied über dieser Menge abschätzen. Dadurch lässt sich der Term $R(\underline{x}_k)$ als amplitudenbegrenzter Fehler auffassen und kann durch

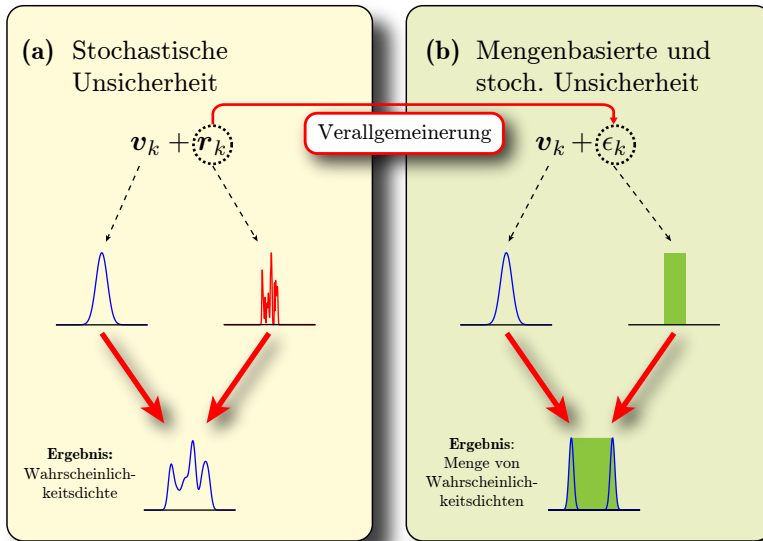


Abbildung 14.4: Darstellung von Unsicherheiten: (a) Störung ist als Addition zweier Zufallsvariablen gegeben. (b) Störung ist durch eine Kombination einer Zufallsvariable und einer Menge gegeben.

eine Menge beschrieben werden. Zur Zustandsschätzung kann nun das Kalman-Filter für Ellipsoide aus Abschnitt 3 verwendet werden.

4.3 Approximation komplizierter Wahrscheinlichkeitsdichten

Ein häufiges Problem beim Einsatz eines allgemeinen bayesschen Schätzers besteht in dem steigenden Aufwand für die Darstellung und Berechnung der Dichten. Dieser Aufwand kann durch verschiedene Approximationen, wie z.B. Linearisierung oder eine Reduktion der Anzahl der Komponenten von Gaußmischdichten, begrenzt werden.

Anstatt durch eine Approximation Fehler einzuführen, erlaubt die Verwendung von Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten eine konservative Abschätzung komplizierter Dichten. Unter der Annahme, dass sich die stochastische Unsicherheit additiv z.B. in einen normalverteilten Term v_k und einen beliebig verteilten, aber amplitudenbegrenzten Störterm r_k

aufteilen lässt, kann \underline{r}_k durch eine mengenbasierte Unsicherheit $\epsilon_k \in \mathcal{E}$ verallgemeinert werden. Abbildung 14.4 verdeutlicht diese Vereinfachung. Die komplizierte Wahrscheinlichkeitsdichte in Teilabbildung (a) setzt sich aus einer normalverteilten und einer amplitudenbegrenzten Zufallsvariablen zusammen. In Teilabbildung (b) wird der amplitudenbegrenzte Anteil durch eine Menge verallgemeinert, so dass sich schließlich eine Menge von verschobenen einfachen Gaußdichten ergibt. Durch diese Vorgehensweise werden Approximationsfehler vermieden. Der einzige Informationsverlust besteht in der Verteilung des Fehlers \underline{r}_k innerhalb der Amplitudengrenzen.

5 Schlussfolgerung

In dieser Arbeit wurde ein Schätzer für Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten vorgestellt. Neben der allgemeinen Verarbeitung von Mengen von Dichten wurde ein Filter beschrieben, welches effizient ellipsoide Mengen von Schätzwerten verarbeitet. Da die Formeln hierfür sehr einfach sind, ist die Verwendung dieses Schätzers direkt möglich.

Die Verarbeitung von Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten ermöglicht nun verschiedene Ansätze, die mit rein stochastischen Schätzern nur mit großem Aufwand möglich sind. Mengen von Dichten erlauben die Beschreibung sowie die Unterscheidung von systematischer und stochastischer Unsicherheit durch die Kombination von Wahrscheinlichkeitsdichten und Mengen zu Mengen von Dichten. Komplizierte Dichten lassen sich mit dem vorgestellten Ansatz durch Mengen „einfacher“ Dichten darstellen und verarbeiten. Der Verarbeitungsaufwand kann hierbei durch entsprechende Abschätzungen des systematischen Fehlers wesentlich geringer sein. Weiterhin ermöglichen Mengen von Dichten eine einfache Berücksichtigung von Linearisierungsfehlern, wie sie in manchen stochastischen Schätzern, wie dem EKF, auftreten. Dadurch lässt sich die entstandene Modellabweichung durch eine Menge abschätzen und man erhält eine Menge von Normalverteilungen, welche den Linearisierungsfehler berücksichtigt und die exakte Schätzung beinhaltet. Insgesamt erlaubt dieses Verfahren eine systematische Behandlung stochastischer und mengenbasierter Unsicherheit, kann so den stochastischen Teil der Zustandsschätzung wesentlich vereinfachen und die Robustheit des Schätzers erhöhen.

Literatur

1. R. E. Kalman, „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems“, *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*, S. 35–45, 1960.
2. A. Doucet, Hrsg., *Sequential Monte Carlo methods in practice*, Ser. Statistics for engineering and information science. New York: Springer, 2001.
3. F. C. Schweppe, *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice-Hall, 1973.
4. A. Kurzhanski und I. Vályi, *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. Birkhäuser, 1997.
5. D. Brunn, F. Sawo und U. D. Hanebeck, „Modellbasierte Vermessung verteilter Phänomene und Generierung optimaler Messsequenzen“, *tm - Technisches Messen*, Oldenbourg Verlag, Vol. 3, S. 75–90, Mar. 2007.
6. U. D. Hanebeck, J. Horn und G. Schmidt, „On combining statistical and set theoretic estimation“, *Automatica*, Vol. 35, Nr. 6, S. 1101–1109, Jun. 1999.
7. I. Levi, *The Enterprise of Knowledge*. MIT Press, 1983.
8. D. R. Morrell und W. C. Stirling, „Set-valued filtering and smoothing“, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 21, Nr. 1, S. 184–193, Jan. 1991.
9. K. Weichselberger, „The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty“, *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 24, S. 149–170(22), May 2000.
10. —, *Elementare Grundbegriffe einer allgemeineren Wahrscheinlichkeitsrechnung I*. Heidelberg: Physica-Verlag, 2001.
11. B. Noack, V. Klumpp, D. Brunn und U. D. Hanebeck, „Nonlinear Bayesian estimation with convex sets of probability densities“, in *Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion (Fusion 2008)*, Cologne, Germany, Jul. 2008, S. 1–8.
12. B. Noack, V. Klumpp und U. D. Hanebeck, „State estimation with sets of densities considering stochastic and systematic errors“, in *Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion (Fusion 2009)*, Seattle, Washington, July 2009.
13. D. F. Bizup und D. E. Brown, „The Over-Extended Kalman Filter – don’t use it!“ in *Proceedings of the Sixth International Conference of Information Fusion*, Vol. 1, 2003, S. 40–46.